بيتر م. هيجنز

الرياضيات للفضوليين

ترجمة

أ.د. إنتصارات محمد حسن الشبكي

الرياضيات للفضوليين

تأليف: بيتر م. هيجنز

ترجمة: أ.د./ إنتصارات محمد حسن الشبكي

مراجعة: أ.د./ بيومي إبراهيم بيومي

كلمات

Mathematics for the Curious

Peter M. Higgins

الرياضيات للفضوليين
بيتر م. هيجنز

الطبعة الرابعة ٢٠١٢م
رقم إيداع ١٩١١٨/٢٠٠٨

كلمات عربية للترجمة والنشر
إن كلمات عربية للترجمة والنشر غير مسئولة عن آراء المؤلف وأفكاره
وإنما يعبّر الكتاب عن آراء مؤلفه
ص.ب. ٥٠، مدينة نصر ١١٧٦٨، القاهرة
جمهورية مصر العربية
تليفون: ٢٢٧٠٦٣٥٢ ٢٠٢+ فاكس: ٢٢٧٠٦٣٥١ ٢٠٢+
البريد الإلكتروني: kalimat@kalimat.org
الموقع الإلكتروني: http://www.kalimat.org

هيجنز، بيتر م.
الرياضيات للفضوليين / بيتر م. هيجنز. - القاهرة : كلمات عربية للترجمة والنشر، ٢٠٠٨.
٢٥٦ص، ١٤,٥ × ٢١,٠سم
تدمك: ٩٧٨ ٩٧٧ ١٢٦٢ ١١١ ١
١- الرياضيات
أ- العنوان
٥١٠

المحتويات

مقدمة

إن غرض هذا الكتاب هو الاستمتاع، ومن ثم فلك — عزيزي القارئ — أن تتصفحه كيفما تشاء، ومع أنه ستترد من حين لآخر إشارات لأشياء سابقة، فلن يفوتك الكثير إذا تجاهلتها وتابعت القراءة. غير أنك قد تجد نفس القدر من المتعة إذا تصفحت موضوعات الكتاب مرتبة أو غير مرتبة، وفي حين أن هذا ربما يفتقر إلى النظام، فإنه نهج معظم دارسي الرياضيات.

أود أن أشكر كل من ساهم بقراءة مسودات الكتاب، سواء من العاملين أو القراء الذين لم تذكر أسماؤهم بمطبعة جامعة أكسفورد، وأشكر جينيفياف هيجينز Genevieve Higgins والدكتور تيم ليفرز Dr Tim Lavers لمراجعتهم وملحوظاتهم القيمة.

بيتر م. هيجنز

كولشيستر، يوليو/تموز ١٩٩٧

الفصل الأول

عشرة أسئلة وإجاباتها

كثير من الأشياء في العالم لها جانب رياضي، ووظيفة الرياضيات هي محاولة فهم هذا الجانب من طبيعة الأشياء، والتفكير في هذه الأمور بشكل رياضي (المنطق الرياضي) غالبًا ما يفسرها وإلا ظلت غامضة أو محيرة، وأحيانًا التعليل المتضمن يكون من السهل فهمه عندما يُعرض.

يتكون هذا الفصل التمهيدي من مجموعة من الأمثلة بهدف إثبات ذلك، فإذا شعرتم أنكم أكثر حكمة بعد تصفحها فأدعوكم إلى متابعة الاستمرار في القراءة. هذا الكتاب لا يدّعي التعمق في الرياضيات، ولكني آمل من خلاله أن أنقل إليكم نكهة الرياضيات الحديثة، كما يمكن استخدامه لتوضيح بعض جوانب الجبر والهندسة المدرسية، وحتى الحساب الذي كنت دائم القلق لصعوبته إلى حد ما. على سبيل المثال، من المؤكد أنه في إمكان أي شخص فهم نظرية فيثاغورث كما يفهمها عالم الرياضيات المتخصص، فمستوى الصعوبة التي يصادفها تشبه صعوبة تجميع لعبة صور مبعثرة من الحجم الصغير. لا يوجد سبب يوضح لماذا هذا الاهتمام بالجوانب المهمة من الرياضيات التي لا تزال غامضة، فمعظم المفكرين من الناس يمكنهم فهم هذه الجوانب مع قليل من الصبر فهمًا تامًّا، بل بعض الجوانب العميقة لرياضيات القرن العشرين يمكن فهمها. آمل أن أعطي القارئ رؤية كافية لبعض أجزاء من عالم الرياضيات لم تكتشف حتى للنوابغ في الماضي.

في المدرسة وكذلك في الجامعة يعمل الطلاب والمدرسون أساسًا للحصول على درجات مرضية في الامتحانات، ولا يوجد غالبًا وقت ليعجب بالمشهد

الرياضي، وهذه ليست حالتنا، فالقارئ هنا لا يرضي أحدًا سوى نفسه، فلسنا في عجلة من أمرنا، كما أننا لا نخشى حكمًا صادرًا على نتائجنا. تمهل في التفكير فيما يطرح عليك. الورقة والقلم قد يساعدان أحيانًا، لا تمنع نفسك من الرسم والتخطيط، ومع أن هذه الخطوط قد تبدو طفولية وغير مُجدية فإنها مساعدات حقيقية لعملية التفكير ولا تُحتقر أبدًا.

١- كم عدد المباريات التي تُلعب في بطولة للتنس؟

هذا هو السؤال العملي الذي من المؤكد أن منظمي البطولة يحتاجون إلي معرفة جوابه. لنأخذ بطولة الجائزة الكبرى (جراند سلام) كمثال، حيث هناك 128 مشتركًا، كل جولة مكونة من أزواج من اللاعبين المتبقين. يلعب كل لاعب مع منافسه بعد قرعة. الخاسرون يخرجون من البطولة ويصعد الفائزون إلى الجولة التالية حتى يتوج البطل. هذه المسألة ليست صعبة في حلها. من الواضح أن هناك $64 = 2 \div 128$ مباراة في الجولة الأولي ويصعد 64 لاعبًا للتنافس في الجولة الثانية، التي تتطلب لعب $32 = 2 \div 64$ مباراة، وهكذا. العدد الكلي للمباريات في هذه البطولة يصبح:

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127.$$

المشكلة قد حُلت، ولكن يبدو أن هناك بذورًا لشيء هام في الإجابة نفسها (127) وهو أن هذا العدد يقل واحدًا عن عدد المشتركين. ماذا يحدث إذن؟

يجب ملاحظة أن عدد المشتركين (128) يثير الفضول في حد ذاته؟ المنظمون اختاروا بفطنة عددًا هو في الحقيقة قوة للعدد 2 أي أن: $128 = 2^7$ أي $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ وذلك يؤدي إلى التأكد من صعود عدد زوجي من اللاعبين عند نهاية كل جولة، بحيث يسهل تقسيمهم في الجولة التالية (إلا في الجولة الأخيرة حيث يبقي لاعب واحد لم يهزم) فالشخص الذي ينعم بمعرفة ما يُسمي بالمتسلسلة الهندسية يمكنه الآن وضع النقط على الحروف. إننا فقط نختبر صحة: $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 2^7 - 1$، وهي

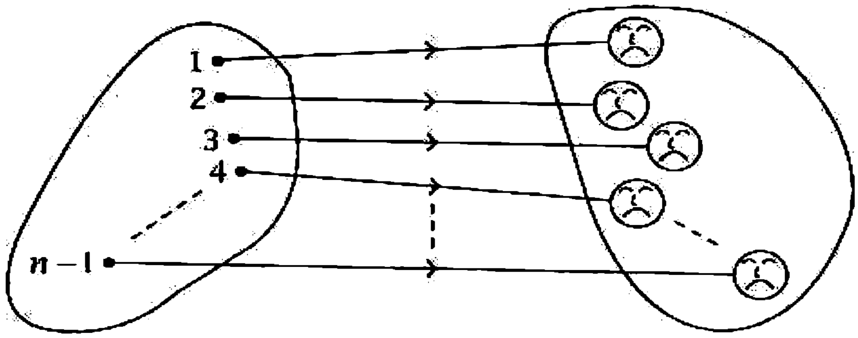
مجرد حالة خاصة من صيغة مجموعات القوى للعدد 2، أنه لأي عدد صحيح n

$$2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

أسارع بالتأكيد على أن هذه ملاحظة فنية بعيدة عن الموضوع. ما هي النقطة؟ حتى نرى ما أحاول توضيحه دعنا نُغير المثال قليلًا: نفرض أننا سمحنا باشتراك 100 لاعب بدلًا من 128 في هذه البطولة. هذا قد يحدث في بطولة للهواة حيث نسمح لكل من يرغب في اللعب بدخول المسابقة. واضح أن هناك 50 مباراة في الجولة الأولي و25 مباراة في الثانية لكن بعد ذلك أصبح لدينا عدد فردي من اللاعبين (25). للتعامل مع هذا الوضع، علينا أن نختار أحد اللاعبين عشوائيًا ليصعد مباشرة إلى الجولة التالية بدون أن يلعب ويكون هناك إذن 13 لاعبًا بعد الجولة الثالثة (12 لاعبًا فائزًا من الجولة الثالثة مع لاعب صعِد مباشرة دون أن يلعب) وبالتفكير قليلًا نجد أن العدد الإجمالي للاعبين عند بداية كل جولة يكون طبقًا للمتتابعة: $100, 50, 25, 13, 7, 4, 2$ ويكون إجمالي المباريات في هذه البطولة هو:

$$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 2 + 1 = 99.$$

مرة أخرى حصلنا على الإجابة بالرغم من الوصول إلى الجواب الأخير بطريقة صعبة قليلًا. فإذا كررنا الحسابات لأعداد مختلفة من المشتركين فإنك ستجد أنه إذا بدأت بعدد n من اللاعبين فإن عدد المباريات سيكون دائمًا $n - 1$. أعتقد أنه يجب أن يكون هناك سبب لذلك، أو برهان إذا رغبت. هناك برهان يعتمد على القسمة على 2 ثم تكرار الجمع عددًا معينًا من المرات ويبدو أنه مليء بالصعوبات. الحجة المسئولة عن الإضافة إلى العدد الفردي للاعبين المتبقين على فترات غير منتظمة، كما فعلنا، ويبدو أنه من الصعب وصف العملية كلها بشكل عام بطريقة دقيقة للوصول إلي النتيجة المطلوبة مع أنها أفكار بسيطة.



شكل ١

هذا النوع من الأشياء يحدث كثيرًا لعلماء الرياضيات، فهم يشعرون بالثقة في افتراض معين، ويبدو للوهلة الأولى أن هناك طريقة مباشرة لإثباته، لكنهم صادفوا صعوبات في إتمام برهان هذا الافتراض. خط معالجة المشكلة يضعك أمام كثير من المساومات ويجعلك مجبرًا على أن تتعامل مع جوانب أخرى لم تكن مهتمًا بها من قبل.

يحدث كثيرًا كما في حالتنا تلك أننا لا نستطيع أن نرى الأشياء الهامة؛ لتركيزنا على التفاصيل الصغيرة، لذلك فالمطلوب العودة إلى الخلف لنلاحظ ما يحدث. الملاحظة الأساسية هي أن عدد المباريات هو بالضبط عدد الخاسرين. يخرج من كل مباراة لاعب خاسر وكل لاعب فيما عدا اللاعب الفائز بالبطولة، سوف يخسر مباراة واحدة. ومن ثم يجب أن يكون هناك دائمًا عدد من المباريات يقل واحدًا عن عدد اللاعبين.

هذا برهان جميل (عادل). يمس لُب المشكلة مباشرة ويسمح لنا أن نفهم ما يحدث بتقديم سبب واضح لا شبهة فيه عن سبب هذه النتيجة وكونها دائمًا بهذا الشكل. بالرغم من بساطة وقصر هذا الاستنتاج فليس من السهل بأي حال من الأحوال الوصول إليه، فلذلك لا تخجل إذا لم تفهم، أما إن استطعت إدراكه فلك الحق في أن تهنئ نفسك.

هذا المبدأ (التناظر واحد مع واحد) بين مجموعة ما لدينا ومجموعة أخرى أسهل نسبيًا في الحساب [انظر الشكل ١] يظهر دائمًا في نظرية العد والاحتمالات.

الفكرة بسيطة كما تبدو ولكنها بحق فكرة جيدة. من حق الفرد أن يعيد التفكير، على الأقل إذا وجد الحل سريعًا.

أعلم هنا أنني أبالغ لأن الفكرة واضحة بشدة. على أية حال أنا أعرف أن أذكياء الناس دائمًا ما يحدقون في مسألة كتلك التي في حالتنا لساعات دون أن يكتشفوا التناظر الأساسي تمامًا. من المتوقع أن يواجه علماء الرياضيات صعوبات أقل، لكنهم أساسًا قد تعلموا هذه الحيلة. إنها غير واضحة بالفعل، فقط هي بسيطة، ومن ثم فهي سهلة فعلًا مادمت رأيتها.

مسألة مشابهة تتعلق بتقسيم قطعة من الشيكولاتة على شكل مستطيل.

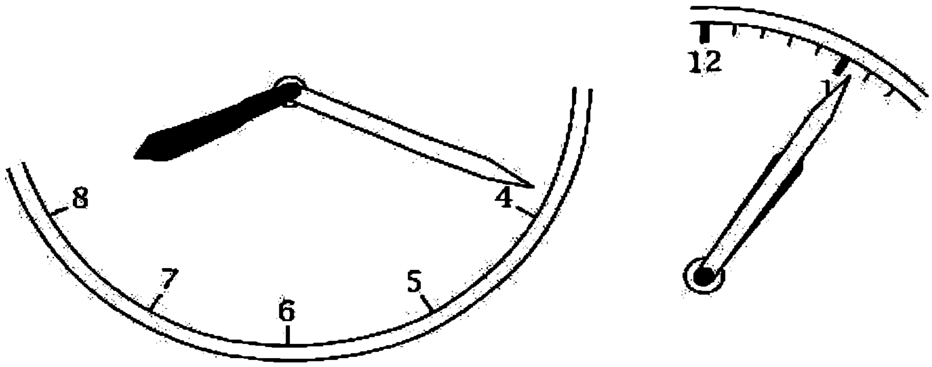
٢- ما هو أقل عدد من الكسر مطلوب لتقسيم عمود من الشيكولاتة إلى رقم فردي؟

لنفرض أن لدينا كتلة من الشيكولاتة 5×4 تحوي 20 قطعة. جواب السؤال سيكون: 19. لماذا؟ لأنه في كل مرة تكسر قطعة الشيكولاتة فإن العدد الكلي للقطع يزيد واحدًا. لأنك بدأت بقطعة واحدة فإنك تحتاج إلى كسر قطعة الشيكولاتة 19 مرة حتى تحصل على العشرين قطعة.

دائمًا هناك الكثير لنتعلمه من أي مشكلة بعد حلها. تذكر أنك لا تحاول الحصول على درجات في امتحان ما ولكنك تحاول تعلم شيء عن الرياضيات. هناك الكثير من الأشياء يمكنك استنتاجها إذا ما أخذت لحظات في التفكير في ما شاهدته.

أولًا: حقيقة أن قطعة الشيكولاتة كانت مستطيلًا لم تُسهم في الحل. أي أنها يمكن أن تكون كتلة واحدة من أي شكل.

ثانيًا: حصلنا على الحل بكتلة من 20 قطعة مُربعة، وهذا سيكون صحيحًا لأي عدد من المربعات. بشكل عام: إذا كان هناك n مُربعًا فإن عدد مرات الكسر المطلوبة هو $n - 1$. وهذا هو التفكير الرياضي، إيجاد نتائج ومبادئ عامة أكثر من حل مسألة ذات قيمة خاصة مثل 20 في هذه الحالة.



(ب) (أ)

شكل ٢

سوف تصادف هذه الفكرة (الاستفادة من الحالة الخاصة إلى الحالة العامة) في مناسبات عديدة خلال هذا الكتاب.

في النهاية: كنا نبحث عن أقل عدد من مرات الكسر، لكن برهاننا يوضح أنه أكبر عدد أيضًا. على أية حال دعنا نرى ذلك، $n - 1$ من الكسور ينتج عدد n من القطع. النتيجة لا تعتمد على طريقة العمل. لا توجد طريقة خاصة متميزة لفعل ذلك. قد يكون هذا مخيبًا للآمال، لكن يجب معرفته جيدًا. هذه واحدة من استخدامات الرياضيات. تخبرك دائمًا عندما تهدر وقتك محاولاً أن تفعل المستحيل.

مشكلتنا الثالثة تتعلق بوجه الساعة، سوف نحلها بثلاث طرق.

٣- متى ينطبق عقربا الساعة؟

لنكن أكثر تحديدًا. متى ينطبق عقرب الدقائق بالضبط على عقرب الساعات؟

– بعد الساعة 12 ظهرًا. (انظر الشكل ٢(أ)).

يمكننا أن نرى فورًا أن ذلك يحدث بعد قليل من الوقت 1.05، ولكن متى بالضبط؟

هناك حل سريع: بعد مرور الساعة 12 ظهرًا حتى منتصف الليل يوجد 11 فرصة لتطابق عقربي الساعة (نعم 11 وليس 12) وكلها على فترات زمنية متساوية ولذلك فإن الزمن بين تطابقين متتاليين يجب أن يكون $12 \div 11 = 1\frac{1}{11}$ من الساعات وهو تقريبًا ساعة و5 دقائق و27 ثانية.

هذا هو الحل الذي استغل التماثل الكامن في السؤال: الأزواج المتتالية من التطابق متساوية البعد. على أية حال، هذا الحل يترك الشعور بعدم الارتياح أن نسيج الرياضيات قد أعمى أعيننا. إن عد التطابقات يتطلب بعض التفكير، والطريقة التي تركنا بها إحدى نقاط النهاية (الظهر) وأخذنا النقطة الأخرى (منتصف الليل) قد تبدو مشكوكًا بها. قد يكون من الأوضح أن نبدأ من نقطة أخرى — مثلًا الساعة الواحدة — ونتأكد من حدوث 11 تطابقًا خلال فترة الـ 12 ساعة التالية. تتجنب هذه الطريقة أية صعوبات تظهر من نقاط النهاية للفترة الزمنية المستخدمة.

على أية حال هي مسألة جميلة. ولهذا دعنا نحلها مرة أخرى، هذه المرة نبحثها بطريقة مختلفة. دعنا نتخيل أن رأس عقرب الدقائق ورأس عقرب الساعات على الترتيب يمثلان اثنين من هواة الجري حول مسار دائري.

عقرب الدقائق يكمل بالضبط دائرة في الساعة بينما عقرب الساعات يزحف ببطء شديد إلى $\frac{1}{12}$ من الدائرة في الساعة. السؤال الآن: متى يتخطى عقرب الدقائق أولًا عقرب الساعات؟

نترجم المسألة بمعادلة سهلة كما يلي:

بعد t من الساعات لف عقرب الدقائق الدائرة t من المرات بينما عقرب الساعات حصل فقط على $\frac{t}{12}$ من المرات حولها. فمثلًا إذا كانت $t = 4$ فإن عقرب الدقائق لف حول الدائرة بالضبط أربع مرات بينما عقرب الساعات وصل إلى $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ من الدائرة أي أنه في الساعة الرابعة. المسألة الآن هي إيجاد قيمة t التي عندها يتخطى عقرب الدقائق لأول مرة عقرب الساعات. سيكون هذا هو الوقت الذي يقطع فيه عقرب الدقائق لفة كاملة أكثر مما

يفعله عقرب الساعات. وينتج عن ذلك تلك المعادلة:

المسافة المقطوعة بواسطة عقرب الدقائق

= المسافة المقطوعة بعقرب الساعات + 1

أي أن:

$$t = \frac{t}{12} + 1.$$

بتبسيط هذه المعادلة نحصل على: $\frac{11}{12}t = 1$. أي أن الحل بالساعات هو: $t = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$.

هذه الطريقة يمكن استخدامها لحل أي مسألة من هذا النوع. فمثلًا ساعات العرض التي لا تعمل لدى الجواهرجي دائمًا ثابتة على زمن 20 دقيقة بعد الثامنة، حيث يكون عقربا الساعات والدقائق على مسافات متساوية من الرقم 6 على وجه الساعة (انظر الشكل ٢(ب)).

اللحظة الأكثر دقة التي يحدث فيها التماثل هي: $18\frac{6}{13}$ دقيقة بعد الثامنة. المعادلة التي نحتاجها معقدة قليلًا هذه المرة. لكل دقيقة تمر، يتحرك عقرب الدقائق يمسح $\frac{360°}{60°} = 6°$ بينما عقرب الساعات يمر إلى $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ من هذه الزاوية أي نصف درجة. ومن ثم بعد t من الدقائق بعد الثامنة فإن الزاوية بين عقرب الدقائق والخط المار من مركز وجه الساعة إلى الرقم 6 تُعْطَى بـ $180 - 6t$ من الدرجات. الزاوية المناظرة لعقرب الساعات تبدأ عند $60°$ وتزيد بمقدار $\frac{t}{2}$ درجة في كل دقيقة. نرغب في إيجاد قيمة t عندما تتساوى الزاويتان، أي المطلوب حل المعادلة:

$$180 - 6t = 60 + \frac{t}{2}.$$

وهذا يؤدي إلى:

$$\frac{13t}{2} = 120,$$

ويعطي قيمة $t = 18\frac{6}{11}$ دقيقة كما ذكر سابقًا. فالنتيجة هي: 18 دقيقة و ٢٨ ثانية بعد الساعة الثامنة مقربة لأقرب ثانية.

الحل النهائي لهذه المسألة هو أقل براعة وأكثر تعقيدًا من الناحية الرياضية، ومع ذلك فهو يستخدم الاتجاه الذي يتبناه معظم البشر بشكل طبيعي لهذه المسألة وهي تقنية (أخيل[1] والسلحفاة.) لأننا نستطيع رؤية الحل التقريبي على الفور فالطريقة العملية التي لا تقاوم أن نتابع التقريبات المتتالية كالآتي:

يظهر التطابق الأول بعد الساعة الواحدة فنتخيل أن عقربي الساعة يلتقيان عند هذا الوقت. بعد خمس دقائق أخيل (عقرب الدقائق) قد وصل إلى الرقم «١» في الساعة. بينما السلحفاة (عقرب الساعات) في نفس الوقت تحرك قليلًا، وطلبًا للدقة حيث إن $\frac{1}{12}$ من الساعة مرت، والسلحفاة تتحرك بسرعة $\frac{1}{12}$ من محيط الدائرة كل ساعة، تكون السلحفاة قد قطعت مسافة مقدارها $(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12})$ من الساعة، ويسمح هذا الوقت لأخيل أن يصل إلى مكان السلحفاة التي تكون قد قطعت مسافة مقدارها $(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12})$ من الساعة، وهكذا.

لا يبدو هذا حلًّا على الإطلاق، فقط مجرد سلسلة متعاقبة من التقريبات الأحسن ثم الأحسن. في الواقع، ظن اليونانيون في العصور القديمة أن هذه الوسيلة تقود إلى صعوبات لا يمكن تخطيها لأنها تنتج قائمة لا تنتهي من المهام، على أخيل أن يؤديها قبل أن يلحق بالسلحفاة. قد يستغرق ذلك وقتًا لانهائيًّا، فالمسكين أخيل لن يمسك بالسلحفاة أبدًا. وهذه واحدة من مفارقات زينو Zeno's Paradoxes.

لا داعي للانزعاج؛ فالحقيقة أننا تخيلنا فترة زمنية محدودة كمجموعة لانهائية من فترات صغيرة ولن يسبب أي صعوبة لأخيل. الفرض الخاطئ الذي أدى إلى تلك المفارقة هو أننا عندما نجمع متتابعة لانهائية من الأعداد الموجبة فإن المجموع يجب أن يتجاوز كل الحدود. قد يبدو هذا معقولًا، لكننا

[1] أخيل: بطل أسطوري في الأساطير اليونانية القديمة كان محميًّا بواسطة سحر، والمكان الوحيد الذي يمكن أن يؤذى منه هو عقب قدمه.

أثبتنا أن ذلك غير صحيح. بعد أن قمنا بحل هذه المسألة — مرتين — يمكن أن نستنتج أن:

$$1+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^3+\cdots=1\frac{1}{11}.$$

ماذا يعني ذلك؟ هذا يعني أن $1\frac{1}{11}$ هو أقل عدد لا يمكن تجاوزه بإضافة أي عدد محدود من حدود (أعداد) هذه المتتابعة اللانهائية. بأسلوب آخر: المجموع الذي نحصل عليه بجمع المزيد والمزيد من الحدود سوف يزداد ويزداد لكنه لن يتعدى قيمة النهاية $1\frac{1}{11}$.

وهذا يعتبر مثالًا آخر عن المتسلسلات الهندسية. وقد صادفنا واحدة منها في سؤالنا الأول عن بطولة التنس. (حيث كانت تحتوي على قوى للعدد 2 وعدد محدود من الأرقام). وسوف نتحدث أكثر عن هذا النوع الهام من المتسلسلات في فصل لاحق، لكن لإشباع الفضول عن هذا الموضوع بشكل مؤقت سنقول (بطريقة عابرة) إن المتسلسلة:

$$1+r+r^2+r^3+\cdots,$$

حيث r عدد موجب أقل من 1 له قيمة نهائية تساوي $1/(1-r)$. في مثالنا $r=\frac{1}{12}$، والمثال الأبسط عندما $r=\frac{1}{2}$ فتكون صيغة المجموع:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)=1\Big/\frac{1}{2}=2.$$

وسؤالنا عن الساعة قد أثبت بطريقة مثمرة صحة هذا المجموع.

مسألتنا الرابعة أسهل.

٤- هل تخفيض 10% تليها زيادة 10% ليس لها تأثير إجمالًا؟

عامل يتقاضى أجره بالساعة، تم تخفيض هذا الأجر 10% بينما زادت ساعات عمله بنسبة 10%. رئيسه في العمل أكد له أن هذا لمصلحته. لأن

الرئيس قد أجبر على تخفيض الأجر حتى يظل قادرًا على المنافسة، وزاد عدد الساعات كنوع من الترضية:

«أنت الآن تحصل على 10% أقل في الساعة لكن لديك 10% زيادة في عدد الساعات فيصبح أجرك الأسبوعي كما هو».

هل هذا صحيح؟ لنفرض أن أجر العامل كان 100 جنيه استرليني في الأسبوع. خُفّض أجره عن الساعة بنسبة 10% فمعنى ذلك أن أجره الأسبوعي قد أصبح 90 جنيهًا استرلينيًّا. عدد الساعات زِيد بنسبة 10% أي 10% من 90 جنيهًا استرلينيًّا، هذا يزيد أجره الأسبوعي إلى 99 = 9 + 90 جنيه استرليني وليس 100 جنيه استرليني.

هل يساعد في ذلك إذا حسبنا بطريقة معكوسة؟ نتخيل أننا زدنا عدد الساعات أولًا بنسبة 10%، ما يعني أن مرتبه يرتفع إلى 110 جنيه استرليني، ثم خفضنا أجر الساعة بنسبة 10%، فإن 10% من 110 هي 11 أي أن أجره انخفض إلى 99 = 11 – 110، بأي طريقة نحسبها فإن العامل سوف يخسر. يبدو ذلك ظالمًا — الرياضيات تبدو متآمرة مع رئيس العمل لاستغلال العامل. على أية حال ما هو الخطأ في حجة رئيس العمل؟

حجة رئيس العمل معيبة، والعيب يقع في أنه لم يحدد الموضوع عندما تحدث بطلاقة عن 10%. إذا أنت خفضت بنسبة 10% ثم زدت ما معك الآن بنفس النسبة فإنك لن تعود أبدًا إلى ما بدأت به. مهما كان الترتيب في الزيادة والخفض فالنتيجة ستكون دائمًا انخفاض 1%.

يبدو أننا بصدد افتقار شديد للتماثل. دعنا ندرس مسألة أخرى لنرى هل نتمكن من استعادة التوازن. لنفرض أن العامل قد حصل على زيادة في أجر الساعة بنسبة 10% وانخفضت ساعات عمله بنسبة 10%، أعتقد أن هذا هو الوجه الآخر للعملة — مرتبه الأسبوعي سيرتفع الآن إلى 101 جنيه استرليني؟

أخشى أن يكون هذا ما نتمناه أن يحدث بالرغم من أن ذلك غير ممكن. لكن إذا بحثت الأمر فسوف ينتهي عند 99 جنيه استرليني مرة أخرى.

بالرغم من أن العامل تبعًا لهذه القاعدة سيكون لديه عدد ساعات عمل أقل (الحسابات هي نفسها كما سبق وتستطيع أن تجرب ذلك بنفسك).

مرة أخرى، ليس من الصعب الرؤية خلال اللغز. لتكن P هي الأجر الأسبوعي للعامل. في كلا الحالتين يُتخذ إجراءان: أحدهما يؤثر بزيادة الأجر بنسبة 10% أي حاصل ضرب P في $1.1 = 0.1 + 1$، والآخر يخفض الأجر بنفس النسبة ونحصل عليه بضرب الأجر P في $0.9 = 0.1 - 1$. الترتيب الذي يتم به هذا العمل غير هام، إذن:

$$P \times 1.1 \times 0.9 = 0.99 \times P = P \times 0.9 \times 1.1,$$

ومن ثم فإن هذا العامل الفقير دائمًا ما ينتهي به الأمر بفقد 1% من أجره نتيجة لهذا الزوج من التغييرات. نلاحظ أننا عممنا المسألة مرة أخرى، ولأسباب جيدة، فإن دراسة الموقف العام يجعل الأمر أكثر وضوحًا وذلك لأننا أصبحنا أقل انشغالًا بالجوانب الخاصة للحالة (وهي القيمة الفعلية للأجر P) حيث إنها لا تؤثر بصورة كبيرة على المشكلة القائمة.

المشاكل والبراهين التي تحوي على نسب مئوية تسبب الكثير من الالتباس ولا يمكن تجاهلها لأنها تتغلغل في جميع تعاملاتنا المالية وأشياء أخرى كثيرة. لكن ما النسبة المئوية ولماذا تظهر باستمرار؟

الجزء الأول من السؤال إجابته سهلة. 1% من أي مقدار هو ببساطة جزء قدره $\frac{1}{100}$ من المقدار. لماذا نضع كل هذا التركيز على هذا الكسر الخاص؟

الإجابة واقعية تمامًا ولهذا السبب فهي لا تحظى بأهمية كبيرة لدى علماء الرياضيات (بالرغم من أن المشاكل التي تحتوي على فائدة مركبة أصبح لها مضمون رياضي، وقادت إلى أسئلة ليست مجرد أسئلة حسابية بسيطة، وسوف نتعرف على الكثير لاحقًا.)

ما نستخدمه هو قوى العدد $10(100 = 10^2)$ لأنه أساس النظام العددي الذي اخترناه للتعامل به. (بلا شك بسبب عدد أصابعنا). ربما تعلم أن نظام الحاسب دائمًا يستخدم الأساس «2» أو النظام الثنائي ولهذا فإن الرمزين 0، 1 هما المطلوبان ليناظرا حالتي الآلة: لا يعمل (off) ويعمل

«11»). وقد تكرر الدفاع عن الحساب بالأساس «12» النظام الاثني عشري، ادعى المطالبون به أن ذلك قد يجعل العمليات الحسابية أكثر سهولة وأكثر فهمًا إذا استعملنا 12 كأساس للنظام؛ لأن العدد «12» له عوامل أكثر من عوامل العدد «10». ويجبرنا ذلك على تقديم رمزين جديدين للعددين 10، 11، لكن الأساس 12 سوف يستخدم تمامًا مثل الأساس 10. فمثلًا العدد 171 بالنظام العشري المعتاد سيصبح 123 بالنسبة إلى النظام الاثني عشري، بمعنى أنه: $3 + 12 \times 2 + 12^2 \times 1$. أيُّ عدد ينتهي (رقم آحاده) بالرقم 3 في الأساس 12 هو مضاعف للعدد 3 (أي يقبل القسمة على 3) لأن 3 عامل من عوامل 12. ويناظر هذا الموقف بالضبط ما يحدث في النظام العشري، حيث إن كل عدد ينتهي بالرقم 5 في النظام العشري هو مضاعف للعدد 5، وليس من الواضح أن 171 مضاعف 3 في النظام العشري (ولكن يمكن التحقق من ذلك بجمع أرقامه والتأكد من كون المجموع مضاعفًا للعدد 3 ومن ثم في حالتنا هذه متحققة — حيث مجموع أرقامه «9».

كما في لغة الاسبرانتو[٢] النظام الاثنا عشري سيكون له بدون شك مزايا كثيرة إذا استطاع العالم أن يواكب التغيير. وسيظل النظام الاثنا عشري فكرة منطقية سليمة لا يتبناها أحد.

لماذا أعطينا اسمًا خاصًّا للكسر $\frac{1}{100}$ بدلًا من $\frac{1}{10}$ أو $\frac{1}{1000}$؟

الأعداد الصغيرة أسهل في التعامل معها من الأعداد الكبيرة، وهذا هو السبب لرفض العدد 1000. إن الميزة العملية الأساسية للعدد 100 على العدد 10 — كقاعدة عملية — هي أن الكسر $\frac{1}{100}$ من أي كمية هو أصغر جزء له معنى، فمثلًا خَفْض الأجور بنسبة 1% كبير بما فيه الكفاية ليُشعرنا بالضيق. ومن ثم من الطبيعي أن نعطيه اسمًا خاصًّا، (هو النسبة المئوية) للكسر $\frac{1}{100}$. وتأثير ذلك هو أنه في معظم المناقشات المتعلقة بالأمور المالية خصوصًا ستكون الأعداد المستخدمة ذات حجمٍ معقول يمكن عده على أصابع اليدين والقدمين.

[٢] (لغة اصطناعية) اخترعت سنة ١٨٧١ لتساعد الناس من مختلف الدول ليتحدث بعضهم إلى بعض (محاولة لتوحيد العالم).

وتلك النقطة العملية، الحجم الفعلي للوحدات، عامل غالبًا ما يغفل عنه عندما تناقش مزايا نظام من الوحدات على الآخر. أنا متأكد أن كل واحد تقريبًا يفترض أن الأشخاص ذوي الميول العلمية المهرة في التعامل مع الأعداد سيفضلون بشكل تلقائي النظام المتري للقياس على النظام الإنجليزي (البوصة، القدم ...) لكن الحقيقة غير ذلك. على أية حال، فإن كلًّا من النظامين له مزايا وعيوب نسبية. النظام المتري له وحدات تعتمد على قوى 10. تجعله متوافقًا مع الحساب بالأساس 10 وهي تمنحه سهولة في العمليات الحسابية. هناك توافق آخر في وحدة الحجم (اللتر) جرى اختياره حتى يكون لتر واحد من الماء النقي يزن كيلوجرامًا واحدًا. هذه أيضًا فائدة عملية. حجم المتر، على الرغم من أنه اختياري محض، يمكن للفرد أن يقول باستخفاف إنه يساوي ($\frac{1}{10,000,000}$) من المسافة من خط الاستواء إلى القطب الشمالي. هذا يجعله وحدة طبيعية بطريقةٍ ما لكنها ليست طريقة جيدة للاستخدام الواقعي.

من ناحيةٍ أخرى فإن الحجم الفعلي للوحدات الإنجليزية للبوصة والقدم هي بالفعل مقاييس عملية جدًّا. لأنها تتماشى مع المقاييس البشرية للأشياء بعكس السنتيمتر (صغير جدًّا) والمتر كبير (نوعًا ما). تتراوح أطوال البشر ما بين 6–5 أقدام وأيديهم ما بين 8–6 بوصة.

ومن ثم فهم يحيطون أنفسهم بأشياء من نفس المقاييس، التي تقاس بارتياح بوحدات من القدم والبوصة. سبب آخر لتفضيل الوحدات القديمة هو أن كلمات مثل: «قدم وبوصة» أقصر وأسهل على اللسان من سنتيمتر وما شابه ذلك. ومع أن هذه نقطة لُغوية تمامًا فإنها ليست أقل أهمية. فعبارات مثل (فاتت بميل) و(تحرك على طول) هي تعبيرات مفيدة ولا تترجم إلى النظام المتري بطريقة عادية الاستخدام. لو احتوى القدم على 10 بوصات لغزا النظام الإنجليزي العالم.

بالضبط كما أنه من الممكن للناس تعلم لغتين، فإنه من الممكن أن توظف بشكل جيد نظامين للقياس. وآمل أن كلا النظامين يبقى على قيد الحياة لفترة طويلة. وأن نتعلم أن نكون أكثر تعايشًا معهما.

لا يوجد سبب لأن نتهم أحدهما أو الآخر بالهرطقة، فكلاهما جزء من القائمة.

الكلام عن جزء أو أجزاء له معنى فقط إذا علمنا ما هو الهدف من وراء النقاش كما رأينا في المثال، الارتباك والغموض نشأ عندما سمحنا لأنفسنا بالكلام عن ١٠٪ كما لو كانت شيئًا معزولًا — هي فقط 10% من شيء ما ونحتاج أن نعرف ماهية هذا الشيء.

الادعاء العام أنه لا يمكنك الحصول على أكثر من 100% لأي شيء، ومن ثم فإن بيانًا يحتوي على نسبة أكثر من 100% هو أصلًا بدون معنى. من المؤكد أن بيانًا مثل: «ثمن الأسهم في Fabtex قد انخفض بنسبة 150%» ليس له معنى، غير أن أسهم Fabtex يمكن أن يرتفع ثمنها بنسبة 150%، وهذا يعني ببساطة أن الزيادة في السعر تساوي 1.5 ثمنها الأصلي.

حديثًا تعرض أحد مراسلي التليفزيون للنقد عندما قال إن نسبة البطالة في المدينة قد ازدادت من 20% إلى 25% بزيادة 5% فقد قام عدد كبير من المواطنين بالاتصال بمحطة التليفزيون لتوضيح أن المقدار ازداد من 20 وحدة إلى 25 وحدة، وتكون النسبة المئوية

$$\frac{25 - 20}{20} \times 100 = 25\%;$$

أي أن الزيادة تساوي ربع العدد الأصلي. في هذه الحالة المقدار في السؤال هو نسبة مئوية وهذا لا يهم فقد زادت بنسبة 25% وليس 5%. ملاحظة المعلق لها معنى (في الحقيقة) لأن الزيادة في عدد العاطلين هي 5% بالنسبة للقوى العاملة بالمدينة. مرة أخرى هي ببساطة مسألة اتفاق لإلى أي شيء نشير عندما نتكلم عن نسبة مئوية معينة.

وأعترف أن مسالة أجور العمال، بالرغم من أنها تبدو فضولية، إلا أنها من وجهة نظر رياضية بحتة أقل اهتمامًا من أسئلتنا حتى الآن. مع أنني رأيت مثالًا لطالبة حصلت على نتيجة مشابهة نتيجة لعملية ضرب. فقد لاحظت أنك إذا أخذت أي عدد مثل 10، وضربت العدد السابق له في العدد التالي له أي 11×9 فسوف تحصل على مربع هذا العدد ناقصًا واحد أي

أن: $1 - 100 = 99 = 11 \times 9$. لقد سألتني بحماس: «أليس هذا مذهلًا؟». وبقدر ما كنت مترددًا بفعل أي شيء لكبح الحماس في الطالبة فقد أخبرتها أن هذا ليس مذهلًا كما تتصور ويمكن شرح هذا على الفور. كل ما لاحظته الطالبة هو لأي عدد n

$$(n-1)(n+1) = n^2 - 1.$$

أي شخص ما زال يتذكر جبر المدرسة الثانوية سوف يستطيع ضرب الأقواس في الطرف الأيسر ويحقق هذه المتساوية الصغيرة. مرة أخرى نرى أن بعض الأشياء قد تبدو غامضة وصعبة للشرح. لكنها تصبح واضحة تمامًا عند اختبارها في الحالة العامة. فإذا لم تكن على دراية بمعلومات الجبر السابقة فلا تنزعج فسوف نعود إلى هذه الأشياء في فصل لاحق. إنها بالفعل تأخذ بعض التبرير، وهذا يعطي بعض الحق لتعجب تلميذتي وانزعاج العمال. حتى الرياضيات البسيطة مثل هذه تحمل درجة من التطور.

٥- أيهما أفضل أداء؟

باسم الكفاءة والنزاهة، تكون مؤشرات الأداء في كل مكان، فمعظمنا نخضع لها. ونموذج واحد يظهر عادةً كدورات لمقاييس الأداء وتكرارها هو أن الأداء يتحسن، والتحسن أكثر مما كنا نعتقد. هذا ينطبق على كل شيء من نتائج الامتحانات لتلاميذ المدارس إلى تقليل معدلات الجريمة إلى تقديرات الأبحاث الجامعية.

مقاييس الأداء تركز الذهن على هذه المقاييس وليس كثيرًا على الأداء، كتحقيق نسبة أداء جيدة — يتعلم الناس كيف يعمل اللعب. هدف قياس الأداء ليس سهلًا كما تتوقع. حتى في مجال الألعاب الرياضية تظهر الصعوبات بأوضاع غير مؤذية تمامًا. هنا نعرض مثالًا بسيطًا:

مؤشر الأداء الرئيسي للرامي في لعبة الكركيت (للذين أكثر معرفة بلعبة البيسبول يمكن التفكير في الرامي على أنه pitcher) هو متوسط عدد

المرات التي يقوم بها runs he concedes per wicket he takes الأقل هو الأفضل. نفرض في مباراة واحدة أحد الفريقين له اثنان من الرماة، A، B حيث هادا بالأرقام التالية:

في الجولة الأولى: أحرز A 3 تصويبات من 60 لعبة، بينما أحرز B 2 من 68.

في الجولة الثانية: أحرز A 1 من 8 وأحرز B 6 من 60.

في الجولة الأولى A له الأداء الأعلى لأن لديه متوسط 20 رمية للهدف بينما B له متوسط 34. في الجولة الثانية مرة أخرى A له الشكل الأفضل؛ لأن له متوسط 8 بينما B له متوسط 10. على أية حال، إذا نظرنا الآن على كل أداء المباراة للاعبين فسوف نرى أن A أخذ 4 من 68 بمتوسط 17 بينما B أخذ 8 أهداف من 128 رمية بمتوسط 16. ولهذا نرى أن النتيجة هي مستساغة أن B له أعلى أداء عن A، لكن كأداء (باستخدام نفس مؤشر الأداء) فإن A أعلى من B في كل جولة.

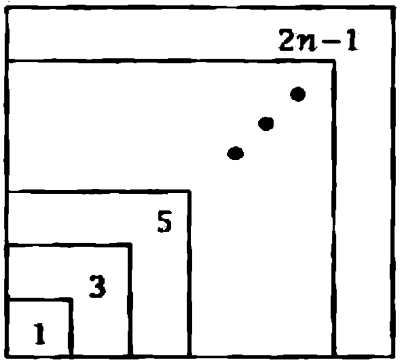
مسألتنا السادسة لها طبيعة مختلفة تمامًا. إنها لتحقيق خاصية الأعداد التي تواجه الناس.

٦- لماذا إضافة أعداد فردية متتالية يؤدي إلى أعداد مربعة تامة؟

$$1 = 1^2, \qquad 1 + 3 = 4 = 2^2, \qquad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2, \ldots$$

جرب حالة أو اثنين إضافية. بلا شك، ستشعر أنك تكتب صيغة عامة للتعبير عن هذا التخمين (قضية مفتوحة): مجموع n من الأعداد الفردية الأولى هو n^2.

أنت تحتاج لرؤية كيف تعبر عن العدد النوني الفردي بدلالة n لتفعل ذلك. العدد الفردي الأول 1 والعدد الفردي الثاني 3 والثالث 5 وهكذا، أي أن



شكل ٣

النمط هو مضاعفة ترتيب العدد وطرح واحد. أي أن العدد النوني الفردي هو $2n - 1$ ($2n$ هو اختصار لـ $2 \times n$). ومن ثم التخمين لدينا يكتب:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

نحن فعلًا اختبرنا هذه الصيغة للأربع قيم الأولي لـ n، لكن هل نستطيع الحصول على حجة مقنعة في الحالة العامة؟ هناك الكثير منها. سوف أعطي حجة ذات طابع هندسي. الفكرة أخذ شكل بسيط وحساب مساحته بطريقتين مختلفتين تتفق كل منهما مع أحد طرفي المعادلة. الشكل الواضح هو تجربة المربع الذي طول ضلعه n حيث إن مساحته هي n^2، ومن ثم نجزئ المربع إلى شرائح غير متداخلة كما في الشكل ٣، الشريحة في الركن ليست شريحة بالضبط ولكن مربع 1×1. لأن كل شريحة تتكون من الذي قبلها بإضافة مربعين واحد عند كل من النهايتين نرى أن المساحة الكلية لهذه الشرائح هي $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ كما هو متوقع.

كما ذكرت سابقًا، فهذه الحجة القائمة على ألعاب الصور المقطعة يمكن استخدامها لإثبات نتائج مهمة كثيرة، بما في ذلك النظرية الشهيرة لفيثاغورث كما سنرى في الفصل الثالث.

مسألتنا التالية مشابهة تمامًا، بالرغم من أن الحل الذي اختِير مختلف تمامًا.

٧- ما مجموع n من أعداد العد الأولى؟

سوف نثبت أن الإجابة هي:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

من السهل جدًا عليك اختبار أن هذه الصيغة صحيحة للأعداد الصغيرة. فمثلًا $1+2+\cdots+10 = 55 = \frac{(10\times 11)}{2}$ كما تقترحه الصيغة السابقة. البرهان المعطى هنا ناتج من إعادة ترتيب المجموع. سوف نجمع الحد الأول مع الحد الأخير والثاني على الحد قبل الأخير وهكذا، فنحصل على:

$$(1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots$$

الفكرة وراء ذلك أن المجموع في كل من هذه الأقواس هو نفس العدد $n + 1$. كل ما علينا فعله هو ضرب هذا القوس بعدد الأزواج للحصول على الإجابة. هذا سهل إذا كانت n عددًا زوجيًا، فإن عدد الأقواس يكون عندئذ $\frac{n}{2}$ ونحصل على النتيجة $(\frac{n}{2}) \times (n+1)$ (وهي نفس الصيغة السابقة. فمثلًا عند $n = 10$:

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + 10 &= (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8)\\ &\quad + (4 + 7) + (5 + 6)\\ &= 11 + 11 + 11 + 11 + 11\\ &= 11 \times 5 = 55.\end{aligned}$$

إذا كانت n عددًا فرديًا فإنه توجد صعوبة بسيطة. طبعًا من المستحيل كسر عدد فردي من الأشياء إلى أزواج. نفس الطريقة السابقة ستترك لنا عددًا واحدًا في الوسط يجب إضافته منفردًا. يمكن الدوران حول ذلك بحيلة صغيرة. نكتب فقط صفرًا في بداية العدد. هذا لن يغير الجواب لكنه سيعطينا عددًا زوجيًا من الحدود نجمعها معًا مرة أخرى وتسمح لنا بإعادة فكرتنا للاستخدام.

مثلًا لقيمة $n = 11$ نعتبر:

$$\begin{aligned}0+1+2+\cdots+11 &= (0+11)+(1+10)+(2+9)\\ &\quad+(3+8)+(4+7)+(5+6)\\ &= 11\times 6 = 66.\end{aligned}$$

في الحالة العامة، للعدد n الفردي فالمعالجة تجري كما يلي:- ضع 0 قبل الجمع وكون الأزواج كما سبق. في هذه الحالة مجموع كل زوج هو n وعدد الأزواج هو $(\frac{n+1}{2})$. حيث إنه يوجد $n + 1$ من الأعداد في المجموع الكلي لأن الصفر «0» أضيف في البداية. ويكون المجموع هو $\frac{n(n+1)}{2}$ بالضبط كما في حالة n زوجية.

هذه الصيغة مهمة، لأنه بمجرد إيجادها أصبح سهلًا إيجاد صيغة لما يسمى المتسلسلة الحسابية. ولكن سننتظر حتى الفصل السابع قبل الكلام عن هذه النقطة مرة أخرى.

مسألتنا التالية سهلة لكن خادعة؛ ولهذا السبب فهي مسلية. تخيل أن لدينا كابل يمتد حول خط الاستواء للأرض (على اعتبار أنه دائرة)، ومن المقرر رفع الكابل حتى يكون بمتر واحد فوق سطح الأرض.

٨- كم يجب أن يزداد طول الكابل حتى يكون على ارتفاع متر واحد عن الأرض؟

دعنا نقترح أربعة احتمالات:

أ: 6 أمتار، ب: 6كم، ج: 600كم، د: 60,000كم.

هل قمت بالتخمين؟ الإجابة الصحيحة هي: أ. مفاجأة! أليس كذلك، كيف وصلنا إلى هذه الإجابة؟ يبدو أننا بحاجة لمعلومات أكثر، وبالتأكيد لمعرفة محيط الكرة الأرضية من أجل حساب الإجابة. ربما وربما لا، دعنا نبدأ دون خوف، وباستخدام رمز للمجهول: ليكن r هو نصف قطر الأرض

ومن ثم يكون محيط الأرض $2\pi r$ (حيث π هي النسبة التقريبية 3.14) أي أن الطول الأصلي للكابل هو $2\pi r$. عند رفع الكابل مترًا واحدًا أعلى السطح فإن الكابل يغطي دائرة نصف قطرها $r + 1$ ويكون طوله أصبح $2\pi(r + 1)$. كل ما نريد معرفته الآن هو الفرق بين المحيطين، وعلى الأقل يمكن كتابة تعبير لهذا:

$$2\pi(r + 1) - 2\pi r.$$

بضرب الأقواس (وتذكر أنه لأي عدد a فإن: $a(r + 1) = ar + a$ وأن 2π عدد) نحصل على:

$$2\pi r + 2\pi - 2\pi r = 2\pi,$$

وبالطبع 2π أكبر قليلًا من 6، مما يوضح أن A هو الاختيار الأصح.

إذا وجدت الإجابة مدهشة أم لا، فحقيقة أننا نستطيع إجابة السؤال على كل حالة مدهشة نحن لم نحتج إلى معرفة نصف قطر الأرض، وهذا له عواقب شديدة. فحيث إن الجواب لا يعتمد على قيمة r، فهذا يعني أن الإجابة صحيحة لأي كرة، حتى لو كانت كرة السلة أو حتى كوكب المشتري.

الحقيقة أن فرضنا أن خط الاستواء دائرة تامة لم يكن له تأثير هام أو غير ذلك في نتيجتنا. محيط الدائرة سمح لنا بكتابة التعبير الدقيق $2\pi r$ للمحيط. التغيير لشكل مختلف حتى لو كان غير منتظم تمامًا سوف يغير ثابت التناسب قليلًا، لكن عددًا صغيرًا مثل الإجابة أ سيظل ساريًا. الأهم من ذلك، أن عدم اعتماد الإجابة على حجم الشكل لا يزال صحيحًا. لأي شكلين متماثلين، مثلًا: دائرة وقطع ناقص، أو أشكال أقل انتظامًا، فإن الزيادة في طول الكابل لا تعتمد على حجم الكوكب في السؤال. (جرب بنفسك المسألة بأخذ كوكب مكعب، ستكتشف أنك تحتاج إلى زيادة طول الكابل بمقدار ثمانية أمتار.)

٩- كيف يقتسم n من الرجال زجاجة من الفودكا؟

لقد أكد لي عدد من الزملاء الروس أن هذه مشكلة في الواقع خطيرة جدًا. توجد زجاجة واحدة ليشترك فيها n من الشاربين، وكل منهم ينبغي أن يقتنع أنه أخذ حصة عادلة. كيف يمكن تحقيق هذا؟

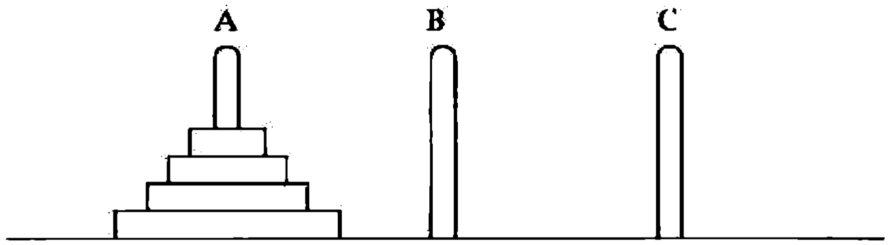
مع اثنين، الأمر بسيط. على الشخص أن يصب في كأسين ويحكم بأنهما كميتان متساويتان تقريبًا من المشروب (الثمين)، بمعنى أنه يكون سعيدًا بالحصول على أيهما. والثاني عليه اختيار أي الكأسين تكون له. وبهذا لا يشتكي أي منهما.

إنها ليست عملية صعبة جدًا مع عدد أكبر من الشاربين أن نبتكر أسلوبًا عمليًّا لأي عدد n. الأول أ يصب ما يدعي أنه حصة عادلة، فإذا فكر أي من الآخرين أنها حصة كبيرة فليأخذ واحد منهم — وليكن ب — كأس أ وينقصها إلى الكمية التي يراها صحيحة، (طبعًا بدون أن يشربها)، ومن المفترض ألا يعترض أحد إذا اعتقدوا أن أ راض بما يبدو أنه أقل من نصيبه.

إذا اعتقد أحدهم أن ب أخذ أكثر، فهذا الشارب يأخذ كأس ب ويصب الزيادة التي يظنها. وتستمر العملية. ومن الأهمية ملاحظة أنه عندما تمر الكأس من يد إلى يد، لا أحد من الأصحاب السابقين سوف يعترض على المستوى الحالي. فمثلًا أ لا يستطيع الشكوى من أن ب حصل على زيادة لأن ب له أقل مما حسبه A حصة عادلة. في كل خطوة يقل عدد المعارضين، حتى نصل إلى وضع حيث أحدهم وليكن X، يمسك الكأس التي يعتقد أنها تمثل حصة عادلة ولا أحد من الآخرين يميل إلى محاجاته (النقاش معه).

السيد X سعيد الآن وينسحب من العملية ليأخذ شرابه، يكرر الباقون نفس العملية بكاملها، ولكن بشارب أقل والباقي من الفودكا حتى يحصل كل منهم على شرابه ويكون سعيدًا.

ومع أن كل واحد منهم ليس سعيدًا تمامًا، فإن هذا النظام الشامل، بصرف النظر عن صبر المشاركين، يخفق في ضمان ألا يحسد أحدهم الآخر على كأسه. فإنه صحيح ألا أحد يستطيع الادعاء أنه لم يحصل على حصة



شكل ٤

عادلة، ولكن واحدًا من الذين خرجوا مبكرًا من العملية (مثل السيد X الذي تقاعد مبكرًا) قد يكون مقتنعًا أن بعضًا ممن خرجوا لاحقًا حصلوا على أكثر من حصته؛ لأن الباقين كانوا حمقى لدرجة تركه يحصل على ذلك.

الرياضيات المحتواة في هذا السؤال تكمن في أسلوب البرهان أكثر منها في المهارة في الحسابات. هذا المنهج، في تحويله حالة تحتوي على n إلى حالة تحتوي $n - 1$ يطلق عليها الحجة الاستقرائية أو الاستنتاجية.

مسألتنا التالية تحل أيضًا بنفس الموديل خطوة بخطوة.

١٠- كم من الوقت يستغرق بناء برج هانوي[٢]؟

المسألة التقليدية لبرج هانوي تتكون من ثلاثة أوتاد A، B، C، مع برج مدرج من حلقات متحدة المركز موضوعة على الوتد الأول كما في الشكل ٤. الهدف هو نقل البرج من A إلى B، مع التقيد بالشرطين التاليين عن طريق تحريك الحلقات بين الأوتاد:

(أ) يمكنك تحريك حلقة واحدة في المرة الواحدة.
(ب) لا تضع حلقة أكبر فوق حلقة أصغر منها.

[٢] مدينة هانوي هي عاصمة دولة فيتنام.

جرب اللعبة ببرج صغير مكون من ثلاث قطع أو أربعة من النقود. سوف ترى فورًا كيف تم ذلك. عليك أن تجد أقل عدد من التحركات حتى تصل إلى الهدف (عدد n من الحلقات).

في الحالة العامة فإننا نحتاج إلى إيجاد أقل عدد من التحركات لإنجاز المطلوب.

الميزة الرياضية التي يجب اغتنامها هي «لكي تلعب المباراة ذات عدد الحلقات n، عليك أولًا أن تلعب المباراة ذات عدد الحلقات $(n - 1)$». فمثلًا انظر إلى المباراة ذات الأربع حلقات والتي تمثل تمثيلًا تامًّا الوضع العام. لن نستطيع تحريك الحلقة الكبيرة في الأسفل حتى تكون نقلت برجًا مكونًا من ثلاث حلقات إلى الوتد التالي. أي يجب أن تلعب أولًا المباراة بثلاث حلقات. بعد ذلك يمكنك وضع الحلقة الكبيرة في المكان المطلوب بحيث لا تتحرك ثانيةً.

لإتمام الطريقة عليك تحريك برج الثلاث حلقات وتضعها على الحلقة الكبيرة، أي أنك سوف تلعب مباراة الثلاث حلقات مرة أخرى.

فإذا كتبنا a_4 لأقل عدد من التحركات لنقل البرج ذي الأربع حلقات وكتبنا a_3 لأقل عدد من التحركات لنقل البرج الثلاثي الحلقات، فالحجة السابقة توضح أن: $a_4 = a_3 + 1 + a_3$، $a_4 = 1 + 2a_3$. واضح أيضًا أن هذه الحجة صحيحة بدقة متناهية لأي مباراة ذات n حلقة وأنه لأي $n = 2, 3, \ldots$ أن:

$$a_n = 1 + 2a_{n-1},$$

حيث a_n ترمز إلى أقل عدد من التحركات المطلوبة للعبة بها n حلقة حتى تكتمل. حيث إنه من الواضح أن $a_1 = 1$ (أي إننا نحتاج حركة واحدة للمباراة ذات الحلقة الواحدة) يمكن استخدام هذه الصيغة — واسمها التقني إعادة الحساب recursion — لحساب القيم المتتالية للعدد a_n. على سبيل المثال: $a_2 = 1+2\times1 = 3$، $a_3 = 1+2\times3 = 7$، $a_4 = 1+2\times7 = 15, \ldots$.

وهنا قد حصلنا على متتابعة الأعداد التالية:

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \ldots$$

هل ينشأ نمط؟ الإجابة: نعم. إذا بدأنا بالعدد 2 وضاعفناه أكثر من مرة فإننا نحصل على نفس المتتابعة تقريبًا:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

الحد النوني لهذه المتتابعة الأخيرة هو 2^n ومن ثم فإن a_n، أقل عدد من التحركات لبناء برج هانوي يعطي بالمعادلة:

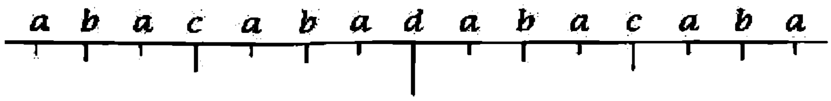
$$a_n = 2^n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

القصة المصاحبة لبرج هانوي (الذي يحتوي على 64 حلقة) أن الرهبان يمكنهم تحريك حلقة واحدة في اليوم وعندما يكملون مهمتهم ستحدث كارثة تعم الجميع. لا داعي للانزعاج بهذا الشأن. حتى لو كان عدد الحركات اليومية 100 في المباراة ذات 20 حلقة نحتاج تقريبًا إلى 30 سنة. ومن ثم فإن مهمة الرهبان في المباراة ذات 64 حلقة ستأخذ بلايين من السنين.

برغم أن هذه ليست نهاية القصة في الرياضيات. يمكننا تعميم المسألة، ونسأل ماذا يحدث إذا كان هناك 4 أوتاد! أو حتى k من الأوتاد؟ ستكون المسألة مشابهة لكن أكثر تعقيدًا. توجد رياضيات مختلفة إذا كنا مهتمين بالبحث عن المتتابعات الفعلية للتحركات وتشفيرها بطريقة طبيعية، كما أشار إلى ذلك كتاب مارتن جاردنر Martin Gardner مجموعة من الألغاز الرياضية وحلولها. فإذا قمنا بتسمية الأربع حلقات في ترتيب تصاعدي بالنسبة للحجم a, b, c, d ولعبنا مباراة الأربع حلقات وكتبنا اسم كل حلقة حركناها فسنحصل على المتتابعة

$$a, b, a, c, a, b, a, d, a, b, a, c, a, b, a.$$

هذا النوع من المتتابعات ينشأ في أماكن أخرى غير هذه المسألة. على سبيل المثال نأخذ المسطرة القديمة حيث البوصات مقسمة ثنائيًّا على أنصاف، أرباع وأثمان و$\frac{1}{16}$ (شكل ٥):



شكل ٥

إذا قرأت من اليسار إلى اليمين حيث أقلهم $\frac{1}{16}$ يقابل أصغر حلقة a و$\frac{1}{8}$ يقابل الحلقة b، وهكذا فإنك تقرأ نفس القائمة السابقة. ظاهرة رياضية مثل هذه في بعض الأحيان تمدنا بعامل مشترك في اثنين من الحالات الأخرى غير المرتبطة، والتي تكون دائمًا مفتاحًا للفهم.

الفصل الثاني

الحقيقة حول الكسور

علماء الرياضيات ليسوا مولعين بالحاسبات كما قد تتوقع. الكمبيوتر والآلات الحاسبة اخترعها وطورها بالطبع علماء الرياضيات والمهندسون وهي مفيدة جدًّا، فلماذا نحن على الأحسن، منقسمون تجاهها؟ السبب أن الآلات الحاسبة لا تستخدم كثيرًا عندما يتعلق الأمر بالمفاهيم الأساسية (المسمار والصامولة) للحساب ويمكن أن تحل محل التفكير بدلًا من الحفز عليه.

استعمال الآلات الحاسبة على نطاق واسع في دروس الرياضيات يمكن أن يقوض العملية التعليمية. هذه الحقيقة معترف بها الآن في التعليم واستخدامها العشوائي قد تقلص.

الأثر المؤسف الآخر لاستخدام الآلة الحاسبة هو أنها تجعل الموضوع مملًّا. الرياضيات في المدارس الثانوية تقلصت إلى سلسلة من ضغط الأزرار، مما شجع الطلاب على نسيان الرياضيات أو على الأقل الابتعاد عنها. هذا التفكير التحفيزي يشبه العمل في خزينة السوبر ماركت. طريقة العمل اليدوي جيدة ما دامت لا تؤدي إلى عقول مغلقة. عادة، الطالب المستخدم للآلة الحاسبة يكتب قليلًا أو لا شيء على الإطلاق وتأثيرها أن تجعله عاجزًا عن التعبير رياضيًّا وغير قادر على حل مسألة تحتاج إلى أكثر من خطوة واحدة.

ومع ذلك ففي هذا الفصل، آمل في اكتشاف المزايا التي توجد في استخدام الآلات الحاسبة. وبفعل ذلك سوف نقابل أغرب فكرة في هذا الكتاب وتسمى المجموعة غير القابلة للعد. غرابتها تكمن في كونها أبعد عن

العالم الواقعي، بالرغم من أن نقطة البداية ستكون سلسلة مألوفة من الأرقام على شاشة عرض الآلة الحاسبة.

الآلات الحاسبة سمحت للناس أن يصبحوا أكثر راحة مع عروض الكسور العشرية، وربما لمدى غير مرغوب، وكثيرًا ما يفضل تقريب سيئ للكسر العشري على كسر بسيط ودقيق. على سبيل المثال، كم مرة نرى 66.7% بدلًا من القيمة الدقيقة $\frac{2}{3}$؟

لمــــاذا من الأحسن أن نستطيع أن نقوم بالحساب؟

الحساب العادي صعب جدًّا. استغرقت البشرية آلاف السنين لتتقنه. الفهم الكامل لحساب الكسور استغرق جهدًا لتحصيله. الجوانب الأساسية للكسور كانت ما تزال تكتشف في القرن التاسع عشر. ما تسمى متسلسلة فيري النونية nth Farey Series هي ببساطة قائمة بجميع الكسور بين صفر وواحد حيث مقاماتها لا تزيد على n مكتوبة بترتيب تصاعدي، فمثلًا متسلسلة فيري الخامسة هي المتسلسلة:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

متسلسلات فيري مليئة بالخواص الجبرية الأنيقة وحتى الهندسية ومكتشفها عالم رياضيات من الهواة. لابد أن عجز علماء الرياضيات على مر العصور عن إدراك هذا الجانب المثير والأساسي لعلم الرياضيات كان بمنزلة صدمة لعباقرة العصر، مع أنه يبدو أن السمات الأساسية لمتوالية فيري نشرت أول مانشرت عام ١٨٠٢م على يد هاروس Haros الذي سبق نشر فيري لها بنحو أربعة عشر عامًا.

نعود لما بدأنا، لقد سمعنا الأطفال الذين يحاولون إجراء الجمع (ربما ذلك ليس بالجهد الكافي)، وهم يقولون:

> «لماذا أنا بحاجة لتعلم هذا؟ إذا أنا رغبت فقط معرفة هذا الجواب أستطيع استخدام آلتي الحاسبة.»

هذا النوع من الأسئلة كثيرًا ما يولد الإحباط، والذين يسألونه لن يرحبوا بإجابة مستفيضة. عدم القدرة على التعامل مع الأعداد يمكن أن يكون مشكلة بالغة. إذا كنا لا نستطيع إجراء عمليات الجمع فنحن مضطرون للغوص المضني كلما ظهرت أشياء عدديه. حتى حلول الآلات الحاسبة لن تساعد كثيرًا الشخص الجاهل في الرياضيات الذي لا يستطيع الشعور بثقة أنه استخدم الآلة بطريقة صحيحة، وهذا أكثر قليلًا من استخدام القاموس لشخص لا يعرف القراءة.

التعامل مع الأعداد العادية وأسئلة القياسات يتطلب تدريبًا إلى المستوى الذي هو على الأرجح يتجاوز ما أنت في حاجة إليه في الممارسة. وهذا لأن المشاكل التي تقابلها يجب أن تكون مفهومة جيدًا لك حتى تستطيع أن تتعامل معها بثقة في الأحوال العملية.

هل نحن بحاجة لمعرفة الجداول؟ نعم، وسوف أشرح لماذا. المعرفة بنظام الأعداد وتعلم توليد الدوال في حد ذاته جدير بالاهتمام، لكن هناك جانبًا رياضيًا أساسيًا للوضع كذلك. النقطة التي نقدرها هي أن جداول الضرب لا تمثل مجموعة من البيانات العشوائية مثل قائمة أرقام التليفونات لكن أقل مجموعة من حواصل الضرب التي نحتاج معرفتها لكي نقوم بالحساب العادي.

دعونا ننظر إلى شيء أكثر أهمية: الجمع. حتى نتمكن من إجراء عمليات الجمع نحتاج إلى معرفة جداول الجمع حتى 10، مثلًا لجمع العددين 17 و 59 يجب معرفة ما هو 7 + 9 وبنفس الطريقة يجب أن نتذكر جداول الضرب حتى 10 حتى نتعلم كيف نضرب عددين معًا.

(بالمناسبة العددان $a + b$، $a \times b$ يعرفان بأنهما مجموع a، b وحاصل ضربهما، على الترتيب، العدد $\frac{a}{b}$ يسمى خارج قسمة a على b.) إذا لم نعرف هذا الجمع والضرب عن ظهر قلب، فإننا سنضطر إلى إعادة إعدادهما في كل مرة.

لماذا هذه المجموعة الخاصة من الحقائق ضرورية لكي نقوم بالحساب؟ من المؤكد أن هناك بعض العشوائية، لكنها قدمت فعلًا عند

بداية تطور الحساب عندما قررنا استخدام الأساس 10. وكان هذا الاختيار بمحض إرادتنا، لكننا الآن ندفع مقابل ذلك من خلال الحاجة إلى تعلم جداول الجمع والضرب إلى 10 — لو كنا قررنا اختيار النظام الثنائي، لكان لدينا فقط الجمع والضرب التافه لنحفظها.

جرى العرف على دراسة جداول الضرب حتى 12؛ وهذا لأن كثيرًا من نظم القياس لها الأساس 12 (الجنيه، الشلن، بنس، قدم، بوصة ... إلخ)، ولأن حاصل الضرب حتى 12 × 12 تظهر كثيرًا جدًّا فيجدر إضافتها إلى الذاكرة. ما زالوا كذلك بالرغم من أن الحجة لعمل ذلك أصبحت أقل إلزامًا.

من أجل فهم الأعداد إلى مدى مفيد، على التلميذ إجراء الكثير من الحساب. ليست الإجابة هي الشيء الهام، لكن تطور المهارة المطلوبة للحصول عليها. القيام بالعمليات الحسابية يغرس التآلف الأساسي مع الأعداد والثقة في معالجتها. كل الرياضيات العالية تنطوي على نفس النوع من التعامل، الأداء برموز جبرية بدلًا من أعداد خاصة، ومن ثم يحتاج الطالب إلى ترسيخ أقدامه تمامًا في الحساب حتى يكون هذا التعامل هو طبيعته الثانية.

عدم إتقان الأساسيات يترك عقبة لكل المفاهيم المستقبلية للمواد الجديدة. على الخصوص، يجب أن نكون قادرين على التعامل مع الكسور لكي يكون لنا إمكانيات رياضية حقيقية.

هذا الكتاب ليس مقررًا لتجديد المعلومات لهذه الأشياء، لكن سأنتهز هذه الفرصة لأقول شيئًا عن الموضوع. ينبغي لك أن تكون مرتاحًا مع حساب الكسور، وأود أن أدعوك لقراءة باقي هذا الفصل — قراءة الأشياء التي يعلمها الشخص سابقًا تكون ممتعة تمامًا وما زلت آمل أن أقدم لك مفاجأة أو اثنين.

حساب الكسور يتطلب فكرة واضحة عن تساوي الكسور. إذا تصورت كعكة قسمت إلى نصفين ثم إلى أرباع، فسترى أنه على الرغم من أن مفهوم $\frac{2}{4}$ و$\frac{1}{2}$ مختلفان فإنهما يمثلان أجزاءً متساوية من الكعكة.

الكسور $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ وهكذا متكافئة. سنقول أنها متساوية، بالرغم من أن هذا غير دقيق إلا إذا شرحنا: أي أن $\frac{1}{2}$ و$\frac{2}{4}$ كسور مختلفة، لكنها

متساوية لأنها تمثل مقادير متساوية. الجانب الأحسن الآخر لهذا الوضع هو على الرغم من وجود أي عدد من الكسور المساوية لكسر معين، فإن واحدًا فقط منها هو الكسر المختصر، هذا يعني أنه اختُصر لأقل عدد أعلى علامة الكسر ويسمى البسط، وأقل عدد أسفل علامة الكسر ويسمى المقام، وليس بينهما أي عامل مشترك غير الواحد، على سبيل المثال الكسور $\frac{6}{15}$، أي كل منهما يُختصر إلى $\frac{2}{5}$ أي أن $\frac{2}{5}$ هي الصورة المختصرة للكسرين. ومن المؤكد أن الصورة المختصرة أكثر شهرة وهي الأبسط، لأنها تحوي أصغر بسط ومقام من بين جميع الصور الباقية.

التساوي بين الكسور يمكن التعبير عنه خلال الضرب التقاطعي أي ضرب الوسطين في الطرفين:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

(السهم مزدوج الرأس يقرأ: مكافئ، والسهم برأس واحدة يقرأ: يؤدي إلى.)

بشكل أعم يمكننا اختبار ما إذا كان الكسر الموجب أقل أم يساوي كسرًا آخر باستخدام الضرب التقاطعي:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc.$$

(للتذكرة، رموز عدم التساوي ≤ أقل من أو تساوي دائمًا تشير إلى العدد الأصغر في العددين). القاعدة في مقارنة الكسور صحيحة أيضًا إذا استبدلنا ≤ بأي واحدة من >، أو <، أو ≥. القاعدة صحيحة لأن المتباينات تظل كما هي إذا ضرب طرفا المتباينة بأعداد موجبة ويمكننا المرور من المتباينة الأولى في أعلى إلى المتباينة الثانية بضرب طرفي المتباينة في العدد bd. مثال:

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow 14 < 15.$$

نحن الآن في وضع يمكننا إعطاء قاعدة عامة لجمع الكسرين أو طرحهما $\frac{a}{b}$ و$\frac{c}{d}$. أولًا نعوض عن الكسور بكسرين متساويين لهما مقام مشترك.

المقام المشترك يمكن إيجاده بضرب المقامين معًا فنحصل على bd. لأن $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ ،$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$، فنحصل على:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}. \tag{1}$$

الإشارة ± تعني زائد أو ناقص، وتستخدم لضرب عصفورين بحجر واحد. هذه القاعدة صحيحة دائمًا لكن الإجابة الناتجة قد لا تختصر بالرغم من أن الكسرين الأصليين يمكن اختصارهما. مثال:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{1 \times 9 + 2 \times 6}{6 \times 9} = \frac{9 + 12}{54} = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}.$$

من المستحسن وجود قاعدة مثل (1) التي تعطي الإجابة في كل مرة. لكنّ هناك مأخذًا على ذلك. في الأساس، (1) تحتوي جميع المعلومات التي تحتاجها لإضافة وطرح الكسور، لكنها قد تثير ملل شخص ما غير معتاد على الموضوع حيث لم يفهم الفكرة الأساسية للعملية.

يمكن اعتبارها ملخصًا لما يحدث. ثانيًا: القاعدة لا تمثل دائمًا أحسن الطرق للحصول على مجموع معين. بالتدريب، يكون الأفضل البحث عن أقل مقام مشترك. أي مضاعف للعدد b والعدد d. حاصل الضرب bd هو مضاعف للعددين b، d لكنه ليس بالضرورة أقل واحد. على العموم هذا المضاعف الأصغر نحصل عليه من العلاقة $\frac{bd}{h}$ حيث h هو القاسم المشترك الأكبر لكل من b، d، وسوف نقدم المزيد عن هذا في الفصل الرابع. في مثالنا السابق قيمة h هي 3، ومن ثم أصغر مقام مشترك هو $\frac{(6\times9)}{3} = 6 \times 3 = 18$. ومن ثم:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} = \frac{7}{18}.$$

ضرب الكسور أسهل من جمعها، ببساطة نضرب كلا البسطين وكلا المقامين. مرة أخرى الجواب الذي نحصل عليه قد لا يختصر:

$$\frac{5}{12} \times \frac{9}{10} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

من المهم أن يكون الذهن حاضرا للبحث عن عوامل قبل القيام بعملية الضرب، لأن من الممكن الحذف بسهولة

$$\frac{\not{5}^1}{\not{1}\not{2}^4} \times \frac{\not{9}^3}{\not{1}\not{0}^2} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}.$$

توجد وجهة نظر عامة يجب عرضها هنا، ويأخذ طلاب الرياضيات وقتًا طويلًا لاستيعابها. وهي أنه من الأسهل الاختصار في الكسر $\frac{45}{120}$ عند كتابته كحاصل ضرب $\frac{9}{10} \times \frac{5}{12}$. إن إجراء الحساب على عدد ما، أو الجبر على تعبير جبري، قبل إجراء عملية الضرب؛ أبسط من إجرائه بعدما تحصل على نتيجة الضرب.

للأسف، الطالب الحريص على الإجابة غالبًا ما يتجاهل ذلك، ويقوم بعمليات ضرب غير ضرورية مما يؤدي إلى نتائج عكسية. مع وجود الآلة الحاسبة في متناول اليد أخشى إن الإغراء لا يقاوم. عند الحصول على الإجابة الصحيحة، نادرًا ما يكون ذهن الطالب حاضرًا ليحلل ما فعل ويحذف الخطوات غير المطلوبة. هنا يمكن للمعلم الجيد مساعدته.

مباشرة يمكن رؤية أن قاعدتنا لضرب الكسور لها معنى. إذا قسمت الكعكة إلى b من الشرائح المتساوية وكل منها قسم أيضًا إلى d من الأجزاء المتساوية فإننا قسمنا الكعكة إلى bd من القطع المتساوية أي أن:

$$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}.$$

فإذا ضربنا هذا في البسطين a وc نحصل على القاعدة العامة:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

أخيرًا، لتقسيم الكعكة على n يمعني أخذ $\frac{1}{n}$ منها. وعمومًا، للقسمة على $\frac{a}{b}$ نضرب المقدار في المعكوس $\frac{b}{a}$. وخلاصة القول:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

هذا فعلًا يجعل عملية القسمة عكس الضرب، لأنه إذا ضربنا في $\frac{b}{a}$ ثم قسمنا عليها، فإن حاصل ضرب العمليتين هو الضرب في $1 = \frac{ab}{ba} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{b}$.

ومع ذلك فإن قسمة الكسور غالبًا ما تعتبر لغزًا. هذا لا يعني أن الناس لا يستطيعون الجمع، كل ما في الأمر أن قاعدة «اعكس الكسر الثاني ثم قم بعملية الضرب» ما زالت غامضة. أفضل طريقة لجعل العملية مقنعة هو أن تقوم بالقسمة مباشرة وتلاحظ أن الأثر الصافي لما قمت به هو ما تم وصفه بالقاعدة السابقة.

مثال: ما هو الناتج من $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$؟ بتطبيق القاعدة

$$\frac{2}{3}\Big/\frac{3}{4}.$$

لنخلص أنفسنا من المقام في الكسر الأسفل وذلك بضرب كل كسر في 4: تأثير هذه العملية هو الضرب في $1 = \frac{4}{4}$ ومن ثم قيمة الكسر لا تتغير

$$\left(\frac{2}{3} \times 4\right)\Big/\left(\frac{3}{4} \times 4\right) = \left(\frac{2}{3} \times 4\right)\Big/3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

أي أن القسمة على $\frac{3}{4}$ هو نفسه الضرب $\frac{4}{3}$.

استخدامات الكسور يمكن رؤيتها في سجلات قدماء المصريين الذين استخدموا وحدة الكسور Unit Fraction مثل $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{20}$ بحرية، لكنهم تبرموا من النظر إلى الكسور مثل $\frac{2}{7}$ كما لو كانت في نفس الوضع بالرغم من أن الكسر $\frac{2}{3}$ كان له رمز خاص.

إنهم عبروا مثلًا عن $\frac{2}{7}$ بالمجموع $\frac{1}{28}$ ، $\frac{1}{4}$ (ما يبدو لنا أنه طريقة أخرى هو $\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ التي لم تستعطفهم).

هذه على أية حال قادت إلى مشكلة حقيقية: هل من الممكن كتابة أي كسر فعلي يقع بين 0 و 1 على شكل مجموع وحدة كسور مختلفة؟

الإجابة نعم، وإحدى طرق الحصول عليه سوف تقدم لك فرصة تنظيف قدراتك الحسابية. ابدأ من الكسر المعطى، [illegible]. واطرح أكبر وحدة كسور ممكنة. افعل نفس الشيء للباقي واستمر في تكرار العملية.

سوف يؤدي هذا إلى التحليل المطلوب. مثلًا نأخذ الكسر $\frac{9}{20}$. بطرح $\frac{1}{3}$ نحصل على الباقي $\frac{7}{60}$ ثم نطرح من هذا الباقي $\frac{1}{9}$ سوف نحصل على $\frac{1}{180}$ وبذلك نحصل على التحليل المصري:

$$\frac{9}{20} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}.$$

هذا النهج الجشع لطرح أكبر معكوس متاح فعلًا يؤدي إلى النتائج، لكن قد لا يؤدي دائمًا إلى أقصر متتابعة من كسور الوحدة الممكنة كما نرى في هذا المثال لأن: $\frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

جرب بنفسك الطريقة على الكسور $\frac{5}{7}$ و$\frac{6}{13}$ — سوف يمكنك كتابة كل منها كمجموع لثلاثة من كسور الوحدة.

مجموعة كاملة من الأسئلة تطرحها هذه المشكلة القديمة، كثير منها ما زالت تصارع علماء الرياضيات حتى اليوم. أبسط واحد منها هو: كيف نجد أكبر معكوس أصغر من كسر معين؟ سوف نجيب عن هذا في الفصل الخامس مع السؤال الأساسي: كيف نعرف أن هذه الطريقة صالحة؟ حتى تتوقف هذه العملية يجب الوصول إلى مرحلة حيث الباقي نفسه هو كسر وحدة. من المتصور أن هذا قد لا يحدث أبدًا، ونستمر في طرح المعكوسات إلى الأبد. الباقي يؤكد أن الحالة ليست كذلك وسوف نرى في الفصل الخامس أن الكسر الفعلي $\frac{m}{n}$ يمكن كتابته دائمًا كمجموع m أو أقل من كسور الوحدة المختلفة.

ماذا يحدث في حساب الكسور العشرية؟

التعبيرات المحتوية على عدد من الكسور مختلفة المقامات مزعجة. يمكننا التعامل مع كثرة المقامات بإيجاد المقام المشترك لكل الكسور. وهذا يسمح لنا بالتعامل مع أي مشكلة خاصة، لكن من اللطيف أن يكون هناك مقام واحد مشترك لجميع الكسور. بالتأكيد لا يوجد. يمكننا احتواء هذه الصعوبة باللجوء إلى الكسور العشرية. هذا يمكننا من عرض كل

الكسور بطريقة موحدة. على أية حال، الثمن الذي ندفعه هو أن تمثيلنا للكسور — حتى البسيطة جدًا منها — بصفة عامة يصبح غير محدود.

الجميع تقريبًا يعلم أن $\frac{1}{3} = 0.33333...$ الطرف الأيسر لهذه المعادلة يمثل فكرة بسيطة: إنه كسر عادي، بينما الطرف الأيمن يحتوي على عملية لانهائية — أي عملية تستمر إلى الأبد. إذا لم يزعجك هذا اضرب طرفي المعادلة في 3 فتحصل على: $0.99999... = 1$.

لا يوجد خطأ هنا، لكنني وجدت الناس لا تحب هذا المظهر وفورًا يبدءون في الاحتجاج، ويصرون على أن الطرف الأيمن أقل بطريقة ما من الواحد. فأسأل: أقل بكم؟ الإجابة عن هذا السؤال المزعج تكون أحيانًا باقتراح أن $0.99999...$ تمثل العدد الذي يسبق العدد 1، ولكن القيمتين ينفصلان فقط بمسافة متناهية في الصغر. هذا كلام علمي بدرجة كبيرة. لكن لا يوجد مثل هذا العدد — لا يوجد عدد يسبق مباشرة الواحد. بيد أننا في مواجهة شيء أنت قد تكون لم تلاحظه من قبل — أن العدد يمكن كتابته ككسر عشري في صورتين مختلفتين. غير أن هذا قليل الإزعاج ويوجد نوع واحد فقط من الاستثناء هو أن الكسر العشري مثل 2.364 هو نفسه يساوي العدد العشري $2.3639999...$ أيضًا.

هذا يدعونا إلى دراسة الصلة بين الكسور الاعتيادية وتمثيلها العشري. حتى إشعار آخر، نحن نعتد فقط بالأعداد الموجبة، واستخدام الأعداد السالبة مهم طبعًا وسوف نتكلم عنها لاحقًا، لكن ليس لها أي مساهمة في مشكلة التمثيل العشري، ومن ثم لا يعنينا أمرها في الوقت الحالي.

يوجد نوعان من الكسور الاعتيادية: الحقيقية وغير الحقيقية. الكسر الحقيقي هو الكسر حيث البسط أصغر من المقام مثلًا: $\frac{2}{3}$ و$\frac{8}{17}$ ... إلخ.

كل هذه الكسور تمثل أعدادًا بين الصفر والواحد. الكسر الذي بسطه أكبر من مقامه، مثل $\frac{25}{12}$ يسمى كسرًا غير حقيقي. في مثل هذه الحالة بقسمة البسط على المقام يمكننا التعبير عن الكسر كعدد مركب هو في هذه الحالة $2\frac{1}{12}$، وهو يتكون من عدد صحيح يتبعه كسر حقيقي. شكل العدد المركب للكسر مزعج عند استخدامه في الحسابات ومن ثم فإنه يفضل استخدام

التمثيل غير الحقيقي للكسر. ومع ذلك غالبًا ما يكون من الأفضل كتابة الإجابة النهائية لمجموع ما كعدد مركب لأنه يوضح قيمته، فمثلًا كتابة $\frac{47}{7}$ على الصورة $6\frac{5}{7}$ تخبرك بمجرد النظر أنك تتعامل مع مقدار بين 6 و7.

إذا فهمنا كل شيء حول التمثيل العشري للأعداد بين 0 و1، سوف نفهم التمثيل العشري العام، لذلك دعونا نركز على الفترة من 0 إلى 1.

العدد القياسي هو العدد الذي يمكن كتابته على شكل كسر أو كما نقول أحيانًا كنسبة بين عددين صحيحين. كما نعلم، أنه يمكن أن يمثل الكسران المختلفان نفس العدد، $\frac{1}{2}$ و$\frac{2}{4}$ مثلًا. مرة أخرى حصلنا على نفس العدد بطريقتين مختلفتين، ومن ثم، في حالة التمثيل العشري لا نقابل هذا النوع من الإزعاج. باختصار كل من البسط والمقام إلى أبسط صورة يمكن كتابة العدد القياسي في صورة كسر على الصورة $\frac{a}{b}$، حيث a وb ليس بينهما عامل مشترك غير الواحد. وبذلك يمكننا التفكير في الأعداد القياسية كأنها مجموعة جميع الكسور التي نحصل عليها بالطريقة السابقة.

ماذا يحدث عندما نكتب العدد القياسي في صورة كسر عشري؟ الإجابة هي أننا نحصل دائمًا على عدد عشري متكرر، أي عدد عشري حيث توجد كتلة الأرقام المتكررة إلى ما لا نهاية بعد نقطة معينة في المفكوك. ونشير إلى ذلك بوضع نقطة فوق أول وآخر رقم من الكتلة، إليك بعض الأمثلة:

$$\frac{2}{3} = 0.666\ldots = 0.\dot{6}, \qquad \frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots = 0.\dot{1}4285\dot{7},$$
$$\frac{1}{24} = 0.041666\ldots = 0.041\dot{6}, \qquad \frac{1}{17} = 0.\dot{0}58823529411764\dot{7}.$$

قد تعتقد أنني قد نسيت بعض أصدقائك القدامى مثل $\frac{1}{2} = 0.5$ و$\frac{3}{8} = 0.375$، وهي الكسور العشرية المنتهية، وهذا ليس حقيقيًا:

الكسور العشرية المنتهية مثل تلك هي فقط مجرد حالات خاصة للتكرار، وأعني أن $\frac{1}{2} = 0.5\dot{0}$ و$\frac{3}{8} = 0.375\dot{0}$ ولكن بالطبع لا توجد حاجة لكتابة التكرار في هذه الحالة.

هناك العديد من الأسئلة التي يتعين الإجابة عنها:

(١) لماذا تؤدي الأعداد القياسية إلى تكرارات عشرية كما ادعيت الآن؟
(٢) أي الأعداد القياسية تؤدي إلى كسر عشري منتهٍ؟
(٣) ماذا يمكن أن يقال عن طول كتلة التكرار في المفكوك العشري؟
(٤) في الأمثلة الأربعة السابقة أطوال كتلة التكرار كانت على الترتيب 1 و6 و1 و16 أيمكن تحويل كل عدد عشري متكرر إلى كسر؟ وإذا كان فكيف؟

لمعرفة لماذا تؤدي الكسور إلى عدد عشري متكرر، من الأفضل النظر مرة أخرى إلى الطريقة التي تعلمتها لتحويل كسر مثل $\frac{5}{6}$ إلى عدد عشري:

$$\frac{5}{6} = 0.8333\ldots = 0.8\dot{3}.$$

الطريقة التي تعلمتها لفعل ذلك هي:

(١) 6 أكبر من 5، لذلك نكتب 0. (للإشارة إلى أن الكسر أقل من واحد) ومعنا 5.
(٢) 6 موجودة في 50 ثمان مرات والباقي 2 فنكتب 8 ونحتفظ بـ 2

ما حدث هنا إننا عالجنا 5 وكأنها $\frac{1}{10} \times 50$، فبقسمة 50 على 6 يكون هناك 8 (ويعني $\frac{8}{10}$ بالطبع) والباقي 2 وتمثل بـ $\frac{2}{10}$، وما زال يمكن قسمة $\frac{2}{10}$ مرة أخرى على 6 باعتبارها $\frac{1}{100} \times 20$ في الخطوة التالية من القسمة.

(٣) 6 موجودة في 20 ثلاث مرات والباقي 2 فنكتب 3 ونحمل 2.

في هذه المرحلة أثبتنا أن $\frac{5}{6} = 0.83 + (\frac{2}{100} \div 6)$، ونستمر في العمل على هذا الباقي بنفس الطريقة. طبعًا في هذه الحالة، لن يكون الباقي أبدًا صفرًا ومن ثم فإن العملية تستمر إلى الأبد. على أية حال لأن كل البواقي

تساوي 2 من هذه النقطة فصاعدًا، ولأنه كتب علينا تكرار هذا الحساب البسيط مرات عديدة، فنحصل على:

$$\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}.$$

يمكننا الآن إجابة سؤالنا الأول. عند تحويل الكسر $\frac{m}{n}$ إلى عشري، قد يكون كسرًا عشريًا منتهيًا أو لا.

إذا لم يكن منتهيًا، فإن الباقي بعد كل مرحلة في القسمة يجب أن يكون أحد الأعداد $1,2,\ldots,n-1$. وبما أن هناك $n-1$ من الاحتمالات فقط فإن الباقي يجب أن يتكرر في مكان ما من الخطوات n الأولى. إلى أن يظهر الباقي للمرة الثانية فإننا مجبرون على تكرار نفس الدورة من البواقي التي لدينا بالضبط. هذه الدورة، طبعًا تنتهي بنفس الباقي الذي تكرر للمرة الثانية ونكون قد وقعنا في هذه الحلقة إلى الأبد.

فمثلًا $\frac{1}{7}$ هو كسر عشري غير منتهٍ. البواقي الممكنة التي نقابلها عند إجراء القسمة هي الأعداد 1 إلى 6 وبالطبع تظهر جميعها. عند قسمة 1 على 7، دورة البواقي هي: $1,3,2,6,4,5,1,3,2,6,4,5,1,\ldots$ وهكذا ويتضح أن كتلة التكرار وهي 6.

هذا يجيب عن السؤال الأول وأيضًا جزء من الطريق لإجابة السؤال الثالث: ما طول كتلة التكرار؟ إذا كان المقام هو n، فإن طول كتلة التكرار سيكون على الأكثر $n-1$. هذا الطول الأقصى الممكن يظهر في بعض الأحيان — الكسور التي مقامها 7 أو 17 طول كتلة الكتلة هو (التكرار هي على الترتيب 6 أو 16 كما رأينا فعلًا. قانون مورفي لا ينطبق، على كل حال، في هذه الأحوال الوضع ليس دائمًا سيئًا، حتى لو كان المقام عددًا أوليًا: $\frac{1}{11} = 0.\dot{0}\dot{9}$ وهي كتلة طولها فقط 2 وكذلك $\frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}$، وهي كتلة طولها 6 فقط. هناك الكثير عن الطول الكتلة r لكتلة التمثيل العشري للكسر $\frac{m}{n}$. مادامت m وn ليس بينهما عامل مشترك فإن r تعتمد على n وليس على m. قيمة r نفسها يمكن وصفها بطرق أخرى،

ولكنها ليست مريحة كما كنت تتمنى. لا يوجد قانون عام سريع لإيجاد r من قيمة n.

من الناحية الأخرى، السؤال الثاني لمعرفة أي الكسور التي تؤدي إلى كسور عشرية منتهية، هو أكثر سهولة في التعامل؟ نحن نعلم أن $0.5 = \frac{1}{2}$ و$0.2 = \frac{1}{5}$، وأن 2 و5 عوامل للعدد 10، وهو أساس نظامنا العددي. فإذا أخذنا عددين عشريين منتهيين يمكننا ضربهما معًا، والنتيجة ستكون كسرًا عشريًّا منتهيًا آخر.

سوف تتذكر إذا كان العدد الأول له r والعدد الثاني له s فإن حاصل الضرب لن يكون له أكثر من $r+s$ من الأماكن العشرية فمثلًا $0.202 \times 0.01744 = 0.00352288$ وأن الناتج ينتهي بثمان أماكن عشرية لأن $r+s = 3+5 = 8$، ويترتب على ذلك أن أي عدد حاصل ضرب $\frac{1}{2}$ و$\frac{1}{5}$ سيكون له تمثيل عشري منتهٍ فمثلًا:

$$40 = 2^3 \times 5, \qquad \frac{1}{40} = 0.025, \qquad 16 = 2^4 \qquad \frac{1}{16} = 0.0625.$$

إليك ما هو أكثر: أي مضاعف لكسر عشري منتهٍ سيكون أيضًا منتهيًا، فمثلًا $\frac{7}{40} = 0.175$، السبب في ذلك أن ضرب الكسر العشري المنتهي بعدد صحيح لن يُزيد عدد العناصر غير الصفرية بعد النقطة العشرية (بالرغم من أنه قد ينقصها، مثلًا: $0.25 \times 2 = 0.5$). من الأبسط أن نثبت أيضًا أن العكس صحيح: الكسر العشري المنتهي يمكن كتابته على صورة كسر، حيث المقام هو حاصل ضرب $2s \times 5s$، لأن أي كسر عشري منتهٍ يكتب فورًا على صورة كسر مقامه قوى العدد 10، مثلًا:

$$0.255 = \frac{255}{1000} = \frac{51}{200}.$$

في هذا المثال المقام هو:

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^3.$$

طبعًا من الممكن اختصار الكسر كما حدث هنا، لكن المقام يظل حاصل ضرب الأعداد 2، 5 $(200 = 2^3 \times 5^2)$. وصلنا إلى وصف كامل للكسور التي تعطي كسورًا عشرية منتهية.

> الكسر $\frac{m}{n}$ له تمثيل عشري، إذا وفقط إذا، كانت n على الصورة $n = 2^a5^b$، أي أن، إذا وفقط إذا، كان مقام الكسر هو حاصل ضرب 2s، 5s. (هذا يحتوي أيضًا المقامات على صورة 2s فقط أو 5s فقط مثل $\frac{1}{16}$ أو $\frac{1}{25}$).

الأعداد 2 و5 هي أعداد خاصة لأنها عوامل للعدد 10، حيث هي أساس نظام الأعداد الذي نستخدمه. إذا كنا سوف نغير الأساس فإن فصل الكسور العشرية المنتهية سوف يتغير أيضًا معه، فمثلًا: في حالة الأساس 3 (معروف باسم الثلاثية) فالكسر $\frac{1}{3}$ كسر منتهٍ في الثلاثية وتمثيله هو 0.1 حيث 1 تعني $\frac{1}{3} \times 1$ وليس $\frac{1}{10} \times 1$.

نعود الآن إلى السؤال الرابع، سوف أوضح كيف نغير أي كسر عشري متكرر إلى كسر عادي. هذه التقنية الخاصة يبدو أنها لا تُعلم دائمًا في المدارس، وهذا من المخجل حيث إنها طريقة بسيطة وأيضًا ذكية، بعض الأمثلة ستكون كافية لتوضيح الطريقة.

دعنا نجرب $0.\dot{6}\dot{3}$ طول الكتلة r هو 2، ومن ثم نضرب العدد، ولنرمز له بـ a، في $100 = 10^2$. الآن $0.\dot{6}\dot{3} = 0.63\dot{6}\dot{3}$ ومن ثم هذا يؤدي إلى $100a = 63.\dot{6}\dot{3}$. الفكرة هنا أن هذا العدد الجديد له بالضبط نفس المفكوك بعد العلامة العشرية للعدد a. هذا يثبت أن $100a = 63 + a$ بطرح a من الطرفين نحصل على $99a = 63$ أي أن: $a = \frac{63}{99}$ وفي النهاية بعد الاختصار

$$0.\dot{6}\dot{3} = \frac{7}{11}.$$

من الأفضل أن تجرب بعضًا من هذا بنفسك. استخدم نفس التقنية لاختبار أن $\frac{1}{27} = 0.\dot{0}3\dot{7}, \frac{2}{11} = 0.\dot{1}\dot{8}$ (نحتاج هنا للضرب في 1000).

تغيير بسيط يظهر عندما نأخذ مثال $a = 0.2\dot{7}$. وفي هذه الحالة $r - 1$ ومن ثم يحتاج الضرب في 10 فقط لنحصل على $10a = 2.\dot{7}$، بالطرح نحصل على $9a = 2.\dot{7} - 0.2\dot{7}$.

هذه المرة العددان متساويان بعد المكان الثاني في العلامة العشرية، ومن ثم هذه الأجزاء يحذف بعضها بعضًا ونحصل على $9a = 2.7 - 0.2 = 2.5$. بضرب الطرفين في 10 للحصول على معادلة تحتوي أعدادًا صحيحة أي $90a = 25$ ومنها $a = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

مسألة أخرى للتجربة: أثبت أن $\frac{7}{12} = 0.58\dot{3}$؟

في الختام، يمكننا تمثيل أي كسر في صورة كسر عشري متكرر (تذكر أن الكسور العشرية المنتهية تقع في هذه الفصيلة) والعكس بالعكس، ومن ثم إيجاد تناظر بين الأعداد القياسية والكسور العشرية المتكررة. قطعًا من السهل إيجاد كسور عشرية ليست متكررة، فعلى سبيل المثال العدد

$$b = 0.101001000100001000001\ldots,$$

يوجد نمط لهذا المفكوك العشري، لكن ليس كسرًا عشريًّا متكررًا. نستنتج أن b ليست عددًا قياسيًّا — لا يمكن كتابته كنسبة بين عددين صحيحين. الأعداد مثل b، تعرف بأنها أعداد غير قياسية ومن السهل جدًّا إيجادها. فمثلًا يمكنك أن ترى لماذا العدد $0.123456789101112131415 16\ldots$ عدد غير قياسي؟

عدم القياسية في الهندسة

ليس من الصعب توليد أعداد على حاسبك ليس لها نمط واضح عند تمثيلها عشريًّا، جرب $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$. هذا العدد يتطلب بعض التفكير. كيف نعرف أن $\sqrt{2}$ ليس له تمثيل عشري متكرر؟ قد يكون طول كتلة التكرار به مئات من الأرقام، أو أن التكرار لا يبدأ حتى بعد مليون من الأماكن العشرية. بعبارة أخرى: قد يكون عددًا قياسيًّا بعد كل ذلك.

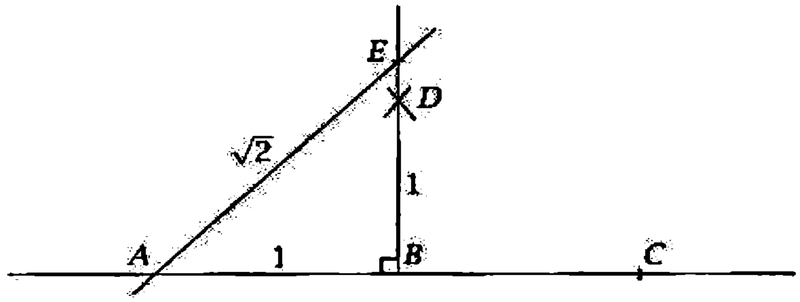
يقال إن الفيثاغورثيين في القرن السادس قبل الميلاد انزعجوا بشدة بشأن أعداد مثل $\sqrt{2}$. من المؤكد أنهم لم يكونوا ليسعدوا بطريقتنا في فعل الأشياء. بعد كل ذلك إذا لم يمكننا كتابة $\sqrt{2}$ على صورة كسر فما معناها إذن؟

في نهجنا خلال مفكوك الكسور العشرية، موقفنا الفلسفي اعتمد على الآتي: نقول إن العدد يكون حقيقيًا إذا أمكن إيجاد تمثيل عشري له. ولهذا السبب $\sqrt{2}$ عدد حقيقي لأنه يمكننا إيجاد المفكوك له لأي عدد من الأماكن العشرية كالآتي: نبدأ بملاحظة أن $1^2 < 2 < 2^2$ ومن ثم بأخذ الجذر التربيعي نجد أن $1 < \sqrt{2} < 2$ أي أن العدد $\sqrt{2}$ يقع بين 1 و2 أي أن $\sqrt{2} = 1....$ ثم نلاحظ أن: $1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$ ونحصل على $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$. نستمر بهذه الطريقة للمكان الثاني والثالث العشري. ونتحقق من $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ و$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$ وهكذا.

في الأساس لا توجد حدود لعدد الأماكن التي يمكن أن نحسبها لعدد $\sqrt{2}$، ومن ثم طريقتنا في التفكير تؤدي إلى أن $\sqrt{2}$ هو عدد حقيقي، حتى لو ظهر أن هذا العدد غير قياسي. (للتأكد توجد طرق أكثر كفاءة لاستخراج الجذور التربيعية من طريقتنا الساذجة، ولكنها كافية لتوضيح الفكرة).

من قراءاتي، أعتقد أن الفيثاغورثيين لم يكن لديهم أي من هذا. كانوا يؤمنون بالبساطة ولديهم ريبه شديدة لأي عملية غير محدودة مثل العملية التي انغمسنا فيها توًا. إنهم لم يقبلوا أن الشيء الذي قدم خلال عملية حسابية غير منتهية سيتمتع بنفس مكانة الأعداد القياسية العادية التي آمنوا بها وشكلت حجر الزاوية في فلسفتهم. ومع ذلك اعتقدوا في $\sqrt{2}$ أيضًا، لكن لأسباب مختلفة تمامًا. بالنسبة لهم $\sqrt{2}$ كان عددًا ذا معنى لأنه يمكن تكوينه. ولشرح نظرتهم، نحتاج إلى تبني نهج هندسي.

نظرية فيثاغورث هي حقيقة بسيطة عن أي مثلث قائم الزاوية. إذا كانت أطوال الجانبين الأقصر هي a وb وكان طول الوتر هو c فإن النظرية تقول $a^2 + b^2 = c^2$. وكحالة خاصة إذا أخذنا $a = b = 1$ فستحصل على $c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. ومن ثم فإن الجانب الأطول



شكل ١

في المثلث هو $c = \sqrt{2}$. اليونانيون علموا أن مثل هذا المثلث يمكن تكوينه دون استخدام جهاز لقياس الطول أو الزاوية، لكن ببساطة باستخدام حافة مستقيمة وفرجار. في نظرهم هذا يعني أن العدد المتكون مثل $\sqrt{2}$ يتمتع بوجود مادي، واعتبروه ذا أهمية خاصة.

دعونا نر كيف ينشأ العدد $\sqrt{2}$، نقول إن عدد a يمكن إنشاؤه يعني أنه — بمعلومية أي قطعة مستقيمة لاستعمالها كمعيار لوحدة الطول — توجد مجموعة من العمليات المتتابعة التي يمكن القيام بها باستخدام حافة مستقيمة (ليست مسطرة مقسمة، بل مجرد حافة مستقيمة) وفرجار تقود إلى قطعة مستقيمة أخرى لها الطول a. لتكوين المثلث القائم الزاوية والمتساوي الساقين الذي ذكرناه سابقًا، يمكن أن نستمر كالتالي: (المثلث المتساوي الساقين يعني أن طولي الضلعين متساويان ومن ثم الزاويتان أيضًا متساويتان).

إذا أعطيت القطعة المستقيمة ولها النهايتان A وB لتستخدمها كوحدة عيارية للطول. مد القطعة المستقيمة من جهة B واستخدم الفرجار لتحديد النقطة C على يمين النقطة B بحيث إن AB وBC يكون لهما نفس الطول كما في الشكل ١.

افتح الفرجار وارسم قطعة من قوس دائرة مركزها النقطة A ودون تغيير فتحة الفرجار، افعل نفس الشيء من النقطة C. الدائرتان سوف تتقاطعان أعلى وأسفل النقطة B: لتكن النقطة هي D، هي نقطة التقاطع أعلى B ارسم الخط من B إلى D. بالتماثل الزاوية ABD هي زاوية قائمة.

استخدم الفرجار، مرة أخرى، لتحديد طول مساوٍ لـ AB على الخط بين B وD. حدد النقطة النهائية E، ونتيجة لهذا التكوين فهي الرأس الثالثة للمثلث القائم حيث الجانبان $1(AB)$ و$1(BE)$ ومن نظرية فيثاغورث $\sqrt{2} = (AE)$.

حقيقة أن $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي عكست طريقة تفكير الفيثاغورثيين. وهناك بعض القصص عن تهديدات بالقتل أو القتل فعلًا لإيقاف هذه الأخبار السيئة للغاية.

هذا يعتبر غير منطقي مقارنةً بطريقة تفكيرنا، وحيث إنه قد مرت حتى وصلنا إلى عصرنا الحالي آلاف السنين، أصبحت هذه القصص لا تثير إلا السخرية.

دعنا نرى لماذا من المستحيل كتابة $\sqrt{2}$ على صورة كسر اعتيادي. سوف نستخدم أسلوب التعارض، سوف نفرض العكس من ذلك ثم نبحث عما يعارض ذلك.

نفرض عكس ما نريد إثباته، أن $\sqrt{2}$ هو العدد القياسي $\frac{a}{b}$، بحيث لا يوجد عامل مشترك بين a وb. بتربيع طرفي $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ نحصل على $2 = \frac{a^2}{b^2}$. أي أن:

$$2b^2 = a^2.$$

لاحظ أن الطرف الأيسر مضاعف للعدد 2، أي أنه عدد زوجي ومن ثم a^2 هو أيضًا عدد زوجي.

وهذا بالتبعية يعني أن a نفسها عدد زوجي. (حاصل ضرب أي عددين فرديين هو أيضًا عدد فردي فإذا كان a عددًا فرديًا فإن a^2 سيكون فرديًا).

ومن ثم يمكن استبدال $2c$ بـ a حيث c عدد صحيح.

ومنها فإن:

$$2b^2 = (2c) \times (2c) = 4c^2$$

نحذف العدد المشترك 2 من طرفي هذه المعادلة نحصل على: $b^2 = 2c^2$. هل تستطيع رؤية الصعوبة القادمة؟ باستخدام نفس المنطق (السببية) كما حدث سابقًا نستنتج أن b تمامًا مثل a هو عدد زوجي. لكن هذا يناقض الفرض الأصلي أن a، b ليس بينهما عامل مشترك. أي فكرة كتابة $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ أدى إلى نتيجة خاطئة وهي أن كلًّا من a وb مضاعف لعدد 2. لم يتبقَّ لنا خيار سوى أن نعترف بأنه لا يمكن كتابة $\sqrt{2}$ على صورة كسر اعتيادي. سوف أثبت في الفصل التاسع أنه من الممكن كتابة $\sqrt{2}$ كمفكوك مكرر من نوع آخر.

الرياضيات الحديثة ممتعة بنتائج من هذا النوع. هذه فقط لإثبات أنه توجد في العالم أكثر من مجرد النسبة بين الأعداد الصحيحة. القدماء في شوق عاطفي لنظام فلسفي يحتوي كل شيء ومن ثم كانت خيبة أملهم مريرة بسبب الاكتشافات الجديدة التي انتهكت معتقداتهم. لا يزال هناك منا الذين يبحثون عن صورة كاملة للكون لكن هذا الموقف يعيق التقدم أكثر من المساعدة عليه. مرة بعد أخرى جوانب عديدة للعلم ازدهرت فقط عندما استرخي الناس وتابعوا الأفكار الجديدة بدون موانع ودون تحيز أو الحاجة إلى تبرير ما يفعلونه من وجهة نظر الفلسفة سواء كانت دينية أو علمانية.

مجرد تحديد عدد غير قياسي واحد، يفتح البوابات لأنك تستطيع أن تولد فورًا الكثير غير المتناهي: نفرض أن x عددًا غير قياسي (يمكن أن تأخذ $x = \sqrt{2}$ إذا رغبت.) ومن ثم لأي عدد قياسي $\frac{a}{b}$ سواء كان موجبًا أو سالبًا فإن العدد $\frac{a}{b} + x$ يكون عددًا غير قياسي أيضًا، لأنه إذا حدث العكس وكان يساوي $\frac{c}{d}$ فسوف نحصل على:

$$x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{(bc - ad)}{bd},$$

وهو عدد قياسي، مناقض لفرض x عددًا غير قياسي. نفس الشيء يحدث إذا ضربنا x في عدد قياسي $\frac{a}{b}$. طالما a ليست الصفر فإن حاصل الضرب

لا يمكن أن يكون عددًا قياسيًّا $\frac{c}{d}$ لأن هذا سوف يؤدي مرة أخرى إلى أن x عدد قياسي (النقطة بين الأعداد القياسية تعني الضرب):

$$\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}.$$

مثال تلك الأعداد $\sqrt{2} + 1$ (بجمع 1) و$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (بالضرب في $\frac{1}{3}$) هي أعداد غير قياسية اعتمادًا على عدم قياسية $\sqrt{2}$.

الشيء الجدير بالملاحظة أنه من الممكن جدًّا جمع عددين غير قياسيين موجبين أو ضربهما وتحصل على إجابة قياسية. مثلًا $2\sqrt{2}$ و$\sqrt{2}$ عددان موجبان غير قياسيين لكن $2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 = 4$ وبنفس الطريقة $2 - \sqrt{2}$ و$\sqrt{2}$ كلاهما عدد غير قياسي موجب مجموعهما 2.

الأكثر غرابة، توجد حجة دقيقة لإثبات أن هناك عددين غير قياسيين a وb بحيث إن a^b يكون عددًا قياسيًّا. سوف نثبت هذا على الرغم من أننا لن نستطيع إيجاد العددين a وb فعلًا! سوف أذكرك أولًا ببعض سلوك قوى الأعداد.

الأسس، اللوغاريتمات، والأعداد غير القياسية:

أول قوانين الأسس هو $a^n \times a^m = a^{n+m}$. هذا واضح إذا لاحظت أن الأس n والأس m هو عدد العوامل في حاصل الضرب، فمثلًا:

$$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a),$$

وهذا يعني أن a مضروب في نفسه $2 + 3 = 5$ من المرات. بنفس الطريقة يمكننا إيجاد معنى القانون الثاني للأسس من خلال الحذف: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$، فمثلًا:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{(a \times a \times a \times a \times a)}{(a \times a)} = a^{5-2} = a^3.$$

وأخيرًا القانون الثالث للأسس هو بالمثل عبارة حسابية: $(a^n)^m = a^{nm}$، فمثلًا:

$$(a^2)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a^{2\times3} = a^6$$

هذا المعنى ينسحب أيضًا على القوى (الأسس) الصحيحة غير الموجبة وذلك بالإصرار على أن هذه القوانين صحيحة دائمًا، فمثلًا نعني بالعدد $a^{1/2} = \sqrt{a}$ لأن:

$$a^{1/2} \times a^{1/2} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a = a^1,$$

وهكذا ويمثل هذا التوضيح:

$$a^{1/2} \times a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a,$$

التوافق مع القانون الأول.

العدد a^{-1} يعني العدد $\frac{1}{a}$ لأن هذا متوافق مع استخدام القانون الثاني في أوضاع مثل:

$$\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a};$$

طرح الأدلة هنا يؤدي إلى قوى $1 - 2 = -1$. القانون الثاني يتطلب أيضًا أن نأخذ $a^0 = 1$ للتحقق من الحقيقة أن $1 = \frac{a^2}{a^2}$ لأن طرح الأدلة هنا يترك القوى $2 - 2 = 0$.

بالنظر إلى قوانين الأسس، يمكننا أن نثبت وجود عددين غير قياسيين a وb حيث a^b عدد قياسي. أولًا نأخذ الحالة $a = b = \sqrt{2}$.

العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ إما أن يكون قياسيًّا أو لا. فإذا كان العدد قياسيًّا فهذا هو المطلوب. من جهة أخرى إذا كان هذا العدد غير قياسي (وهذا قد يكون الاحتمال الأكثر توقعًا) نضع $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ و$b = \sqrt{2}$. فيكون العددان غير

قياسيين وباستخدام القانون الثالث للأسس نحصل على:

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

ومن ثم في كلا الحالتين فإن الأعداد غير القياسية موجودة.

الشيء الملاحظ في هذا البرهان أنه أعطى بديلين واستنتج أن أحدهما يقود إلى مثال عن زوج من الأعداد لهما الخاصية المطلوبة ولكنه لا يقدم أي فكرة عن عددين يحققان ذلك. لهذا السبب كثير من الناس بما فيهم بعض علماء الرياضيات يعتبرون هذا البرهان عمليًا لا قيمة له. لكن هذا لا يزعجني.

حيث إننا استغرقنا وقتًا لمراجعة قوانين الأسس فلدينا فرصة عرض بعض من خواص اللوغاريتمات، وهو موضوع تعرّف عليه الكبار بإسهاب خلال المرحلة الثانوية.

التعريف بسيط: إذا كان $y = 10^x$ فنقول إن x هي لوغاريتم y للأساس 10 ونكتب $x = \log_{10} y$ نستطيع إبدال أي أساس آخر بالأساس 10، لكننا لسنا في حاجة لفعل ذلك هنا.

سوف نستخدم فقط الأساس 10 ونكتب $x = \log y$ ليعني أن $y = 10^x$ فمثلًا $\log 1000 = 3$ لأن $10^3 = 1000$، $\log 0.1 = -1$ لأن $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$.

إن الخاصية السحرية للوغاريتمات التي أدت إلى ثروة علمية كانت تحويل الضرب والقسمة إلى جمع وطرح لأن:

$$\log ab = \log a + \log b; \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

قد سمح لنا ذلك بإجراء عمليات الضرب والقسمة الصعبة بدقة عالية بضرب العددين a وb نبحث عن لوغاريتمي العددين ثم نجمعهما ونوجد العدد الذي لوغاريتمه هذا المجموع أي نحصل على مقابل اللوغاريتم. هذه الخواص هي نتيجة بسيطة لتعريف اللوغاريتم وقوانين الأسس. فمثلًا

خاصية الجمع تنشأ من القانون الأول للأسس نكتب x وy للعددين $\log a$ و$\log b$ على الترتيب فيكون:

$$a = 10^x, b = 10^y \Longrightarrow ab = 10^x 10^y = 10^{x+y},$$

ومن ثم فإن: $\log ab = x + y = \log a + \log b$ بالمثل خاصية الطرح تنشأ من القانون الثاني، عند شرح القانون الثالث نحصل على الخاصية الإضافية أن: $\log(x^y) = y \log x$ ومن ثم، فمثلًا:

$$\log \sqrt{10} = \log(10^{1/2}) = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2}.$$

كل ما هو مطلوب بشكل حاسم ونهائي هو جدول اللوغاريتمات للأعداد بين 1 و10 وبعد ذلك يمكن فعلًا الحصول على لوغاريتم أي عدد؛ لأن أي عدد خارج المنطقة 10 − 1 يمكن التعامل معه بقوانين اللوغاريتمات فمثلًا:

$$\log 84 = \log(10 \times 8.4) = \log 10 + \log 8.4 = 1 + \log 8.4 = 1.9243.$$

ولعلك تتذكر أن هذين الجزأين للوغاريتم، $\log 10$, $\log 8.4$ معروفان باسم الجزء العشري والمميز على التوالي.

اللوغاريتمات كانت أهم الوسائل العملية منذ فترة ليست بعيدة وكانت المسطرة المنزلقة (الحاسبة) هي الظاهرة المادية لها. هذه الأدوات (المسطرة) كانت مقسمة لوغاريتميًّا بدقة فائقة لجمع وطرح اللوغاريتمات. المسطرة المنزلقة الجيدة كانت قطعة هندسية جميلة.

ما تزال إذا كنت تحتفظ بواحدة فربما يكون من الحكمة أن تحافظ عليها فقد تصبح من الأشياء عالية القيمة التاريخية.

التقنية المحتواة في اللوغاريتمات لم تعد تدرس على الإطلاق لأن الغرض الأساسي منها كان عمليًّا وبذلك أصبحت موضة قديمة بوصول الآلات الحاسبة التي تقوم بالعمل بدقة وبسرعة أكبر. على أية حال، هناك خسارة حقيقية صاحبت اختفاء كتاب الجداول. فالتكرار بإمعان في صفحات اللوغاريتمات والدوال المثلثية ولّدت التآلف مع سلوك الدوال نفسها. الأكثر

من ذلك الوسائل المستخدمة لاستعمال القياس والاستكمال (بمعنى تقدير قيم وسيطة لم تكتب صراحة في القائمة) ومن ثم كان المستخدمون يحتاجون إلى الاحتفاظ بذكائهم الرياضي عنها، حيث إن الطلاب في الوقت الحاضر الذين يعتمدون على الآلات الحاسبة لا يملكون هذا الذكاء، لأن المسألة عندما تختصر إلى مجرد تطبيق للآلة، فالطالب يصبح سلبيًّا نسبيًّا، ويتعلم أقل ويوافق على أي شيء تنتجه الآلة الحاسبة دون أي نقد.

يجب أن أضيف أن الدالة اللوغاريتمية ما زالت مهمة في العلوم، فكثير من المقاييس الطبيعية هي لوغاريتمية الأساس، فمقياس الحموضة pH، ومقياس ريختر للزلازل، ومقياس الصوت decibel هي ثلاثة من كثير، بالإضافة إلى أن اللوغاريتم الطبيعي نشأ بشكل لا يقاوم في حساب التفاضل والتكامل، اللوغاريتم للأساس $e = 2.7182...$، العدد e هو عدد غير قياسي نشأ في مسائل خاصة بالربح المركب. ومن ثم طلاب العلوم ما زالوا في حاجة إلى دراية شاملة بحساب اللوغاريتمات، وهم يعانون بفقدهم التدريب العملي التقليدي الذي تقدمه جداول اللوغاريتمات.

اختراع اللوغاريتمات كان دفعًا قويًّا للعلوم حول منعطف القرن السابع عشر والفضل يعود بالدرجة الأولى إلى الاسكتلندي نابير (John Napir) ومع ذلك لم يكن تطورها واضحًا كما هو متوقع، لوغاريتمات نابير الأصلية كانت أقرب ما يكون إلى ما يسمى باللوغاريتم الطبيعي المشار إليه سابقًا.

وعلاوة على ذلك، التقنيات المتوازية كانت تستخدم بواسطة علماء الفلك براها وكيبلر في الدانمرك، في نفس الوقت كانوا يقومون بحسابات صعبة جدًّا على مدار كوكب المريخ باستخدام تقنية تحتوي على متطابقات من حساب المثلثات وتخدم في التعبير عن حاصل الضرب كمجموع. أهمية هذه المتطابقات أصبح موضع تقدير في أوروبا خلال القرن السادس عشر، القواعد نفسها تم اكتشافها في الشرق الأوسط في فترة ترجع إلى القرن الحادي عشر.

بما أننا في موضوع غير القياسية، فمن الإنصاف أن نُذكر بأن إحدى الصعوبات مع اللوغاريتمات هو أن لوغاريتم العدد القياسي هو عدد غير

قياسي إلا إذا كان قوة للعدد 10. فمثلًا من السهل رؤية ذلك للعدد $\log 3$: مرة أخرى سوف نستخدم البرهان بالتناقض. نفرض أن $\log 3$ يساوي الكسر $\frac{a}{b}$ وهذا يعني أن $10^{a/b} = 3$ وبرفع طرفي هذه المعادلة للقوة b نحصل على $10^a = 3^b$. وذلك غير ممكن لأن الطرف الأيسر عدد فردي بينما الطرف الأيمن عدد زوجي.

عدم قياسية الأعداد هو الطبيعي:

على الرغم من أنه توجد بيانات كثيرة جدًّا صائبة في العالم، فنحن نعرف جميعًا أن الصواب أصعب كثيرًا في الحصول عليه من الخطأ. بنفس الطريقة، عدم القياسية شائعة في عدد المرات أكثر من القياسية عند التحدث عن أعداد غير معينة (لأي أعداد). هذا لا ينبغي أن يؤخذ على أنه ملاحظة غير هامة تخص الأعداد غير القياسية، ولكن مجرد وسيلة لتوصيل فكرة أنه بالرغم من وجود أعداد كثيرة جدًّا قياسية فإن قياسية الأعداد ينظر إليها بصدق على أنها استثناء.

إذا فكرنا في الأعداد على أنها مفكوك عشري، فسيصبح واضحًا أن الأعداد غير القياسية التي ليس لها مفكوك غير متكرر يجب أن تكون أكثر شيوعًا من المفكوكات المتكررة للأعداد القياسية. حجة ساذجة تكون بتخيل توليد عدد عشري عشوائي بطريقة ما (بالتقاط الأرقام من قبعة مثلًا.) فرصة المفكوك أن يقع في نمط كتل متكررة ليس فقط عددًا كبيرًا من المرات ولكن مؤكد أنها إلى الأبد ستكون صفرًا. وهذا فعلًا حدس صحيح، ولكنه من شأنه أن يحتوي على بعض الجهد لجعله دقيقًا. الصعوبة في ذلك أن الحجة تدعو إلى اللبس في مفهوم المحدودية (نهائية) واللامحدودية (لانهائية) وهنا نسمح لأنفسنا بالكلام عن نتيجة عملية لانهائية وكأننا فعلًا نفذناها.

النقد يعتمد على ملاحظة أن كلا المجموعتين — الأعداد القياسية والأعداد غير القياسية — لانهائيتان بوضوح، فليس من المنطقي أن نقول إن إحداهما قد تكون أكبر من الأخرى. هذه النتيجة تعتمد على منطق أن جميع المجموعات هي نفسها أساس، وهي فكرة لا تعتمد على التدقيق الجاد.

كان جاليليو أول من أوضح أن الطبيعة الغريبة للمجموعة اللانهائية يمكن تقسيمها إلى جزأين وكل منهما لانهائي ويمكن وضعهما في تناظر أحادي مع المجموعة الأصلية. فمثلًا لا نحتاج إلى النظر أبعد من المجموعة N للأعداد الطبيعية $\{1,2,...\}$ هذه يمكن تجزئتها إلى E وO مجموعة الأعداد الزوجية ومجموعة الأعداد الفردية على الترتيب، بمعنى أنه على الرغم من أنها جميعًا مجموعات لانهائية، N أكبر من E، فـ E محتواة داخل N، جاليليو أوضح أن ما يجعل المجموعة اللانهائية تختلف عن المجموعة النهائية (المحدودة) أن الشخص يمكنه إزالة مجموعات لانهائية منها مثل E من N وما يبقى (O في هذه الحالة) ما زال مجموعة لانهائية. بنفس الطريقة المجموعات النهائية لا يمكن أن تحقق ذلك — إذا أخذنا بعض الأشياء بعيدًا من مجموعة نهائية فمن المؤكد أن الباقي بعد ذلك أصغر من الأصل. هذا هو الفارق الأساسي بين طبيعة اللانهائية وطبيعة المجموعة النهائية.

عمليًا المجموعات اللانهائية يمكن جعلها أسهل في العمل من المجموعات النهائية مادمت تعودت على هذا الجانب من تركيبها.

توجد طريقة أساسية أخرى حيث المجموعات تختلف عن اللانهائية بعضها عن بعض وهي أقل وضوحًا، ويبدو أنها لم تأخذ حقها حتى نهاية القرن الثامن عشر. بعض المجموعات اللانهائية يمكن كتابتها في قائمة والبعض لا يمكن.

مجموعة الأعداد الطبيعية وتسمى N وهو فصل أعداد العد $\{1,2,3,...\}$. هذه المجموعة تجسد فكرة القائمة اللانهائية. غير أن بعض المجموعات اللانهائية الأخرى يمكن أن توضع في تناظر واحد إلى واحد مع الأعداد الطبيعية ومن ثم يمكن أن توضع في قائمة كذلك. فمثلًا خذ المجموعة Z، جميع الأعداد الصحيحة، أي الأعداد الموجبة والأعداد السالبة معًا بالإضافة إلى الصفر:

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

هذه المجموعة تصل إلينا طبيعيًا كنوع من قائمة مضاعفة لانهائية يمكن على أية حال إعادة ترتيبها في قائمة لها نقطة بداية كالتالي:

$$Z = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots \qquad (2)$$

في الحقيقة، سوف نستخدم الفكرة المستعملة هنا أكثر من مرة، إذا كان لدينا قائمتان:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

نستطيع إدماجهما معا لتكوين قائمة واحدة تحوي جميع عناصر القائمتين الأصليتين

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$$

هذا ما حدث عندما جمعنا بين الأعداد الموجبة والسالبة في قائمة واحدة. قد تظن أنه لا يوجد أكثر مما حدث هنا. من المؤكد إذا أعطيت أي مجموعة فيمكن اعتبارها قائمة بشكل ما. لكن كيف الحال مع المجموعة Q مجموعة الأعداد القياسية كلها؟ (لماذا استخدم الحرف Q للأعداد القياسية؟ هل لها علاقة بكلمة «القسمة» quotient). في الحقيقة قد يكون كذلك ولكن نحتاج أن تكون أكثر مهارة. سوف ننظر إلى مشكلة أصعب بعد لحظة، أريد أولًا إزالة مصدر الالتباس المحتمل.

القارئ قد يعترض بشدة على ما أثرته سابقًا، من حيث إن حجة الإدماج السابقة تحتوي على الحديث الواهن عن العملية اللانهائية وكأننا قد نفذناها فعلًا كاملة. وجهة النظر هذه ليست ضرورية لتوضيح — مثلًا — أن مجموعة الأعداد الصحيحة تُكوّن قائمة، مادمنا قدمنا بوضوح ماذا نعني بذلك. تكون قائمة لانهائية L أعني بها هنا أن لكل عدد n توجد قاعدة لتعيين الحد النوني في L. عندما أدعي أن L هي قائمة لكل الأعداد الصحيحة، بمعنى لأي عدد k يمكن إيجاد المكان حيث تظهر k. بكلمات أخرى، على الرغم من أننا قد ننتظر إلى الأبد حتى تظهر

جميع الأعداد الصحيحة، علينا فقط أن ننتظر لعدد محدود من الخطوات لأي عدد مُسمى حتى يظهر. صحيح أنني لم أعط أبدًا قاعدة لتحديد العنصر النوني في القائمة (2) السابقة صراحة، لكني اعتمدت على القراء في معرفة النمط البسيط المستخدم في تكوينها. لا حرج في ذلك شريطة أن تتمكن من مواصلة الكتابة أكثر من هذه القائمة بطريقة ليست غامضة وليس بها خداع. على أية حال، العدد الموجب n يحتل المكان $2n$ في القائمة فمثلًا العدد 3 هو السادس في القائمة والعدد السالب $-n$ يشغل المكان الذي رتبته $(2n+1)$ فمثلًا -3 موجودة في المكان السابع والصفر في المرتبة الأولى، ولهذا نرى أننا نعرف المكان على وجه الدقة لكل عدد صحيح في قائمتنا، فكلها موجودة ومحسوبة.

لنختبر الآن مشكلة كتابة قائمة بجميع الأعداد القياسية بين صفر وواحد. هذه تبدو مهمة صعبة لأن الأعداد القياسية كثيفة، بمعنى أنه بين أي عددين منها يوجد عدد آخر، فمثلًا المتوسط لهما يقع بالضبط في منتصف الطريق بينهما. هذه على أية حال لا تشكل أي صعوبة حقيقة مادمت لا تصر على أن نكتب أعدادنا في نظام تزايد أو تناقص، ببساطة نكتب قائمة الأعداد القياسية التي مقامها واحد أولًا (أي الأعداد $\frac{0}{1}=0$ و$\frac{1}{1}=1$) ثم جميع الأعداد التي مقامها 2 ثم التي مقامها 3 وهكذا:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$$

الملاحظة الأساسية أنه يوجد دائمًا وأبدًا عدد كبير محدود من الأعداد القياسية بين صفر وواحد لها مقام بعينه (إذا كانت n هو المقام فلا يوجد أكثر من n منها) ومن ثم بناء قائمة بهذه الطريقة سوف يعطي في نهاية المطاف كل الأعداد القياسية بين صفر وواحد، لن يهرب أي منها.

الآن تأتي خدعة أخرى. إذا أخذنا جميع أعضاء هذه القائمة بين صفر وواحد ثم قلبنا كل واحد منها فسوف نحصل على جميع الأعداد القياسية الأكبر من الواحد:

$$\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\frac{4}{3},\frac{5}{1},\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{5}{4},\dots$$

هذا يتطلب التفكير قليلًا. ولأن جميع الكسور في القائمة الأولى تقع بين 0 و1، فإن معكوساتها تكون أكبر من الواحد. علاوة على ذلك إذا كان $\frac{m}{n}$ عدد قياس أكبر من الواحد فإن $\frac{n}{m}$ عدد قياس أصغر من الواحد، أي يقع بمكان ما في قائمتنا الأولى، ومن ثم معكوسه $\frac{m}{n}$ سيقع في المكان المناظر من القائمة الثانية. فمثلًا $\frac{5}{4}$ يقع في المكان التاسع في القائمة المعكوسة كما أن $\frac{4}{5}$ هو التاسع في قائمة الكسور (التي تبدأ بـ $\frac{1}{2}$). مرة أخرى لا يفقد أي عدد قياسًا. هذه تبدو جيدة جدًا لتكون صحيحة لأنه يبدو أن الأعداد القياسية أكبر من الواحد أكثر منها بين 0 و1.

لكن كما قلت المجموعات النهائية يمكن أن تكون غريبة.

الآن لدينا مجموعتان يمكن وضعهما في قوائم: الأعداد القياسية بين 0 و1 والأعداد القياسية أكبر من الواحد. باستخدام حجة الإدماج التي استخدمناها سابقًا لإثبات أن الأعداد الصحيحة يمكن أن تكتب في قائمة فيمكننا الجمع بين هاتين المجموعتين في قائمة واحدة، مما يدل على أن الأعداد القياسية بدءًا من الصفر إلى أعلى يمكن أن تكوّن قائمة.

أخيرًا بنفس الطريقة، يمكننا أن نكون قائمة من جميع الأعداد القياسية السالبة، ثم بالإدماج مرة أخرى يمكننا جمع هذه القائمة مع قائمة الأعداد القياسية غير السالبة، لتنتج قائمة واحدة تحتوي على كل الأعداد القياسية. يمكننا فعلًا كتابة دستتين من الأعداد القياسية الأولى في قائمتنا: سوف نكتب الأعداد القياسية الصحيحة دون المقام «1» لتقليل الفوضى. للحفاظ على العرض أكثر تماثلًا، سوف نرتب الأشياء باختلاف قليل: نبدأ بالصفر ولتكن L_1 هي القائمة الأولى للأعداد القياسية بين «0» و«1»، لتكن L_2 هي معكوس الأعداد في L_1، وL_3 هي سالب الأعداد في L_1،

وكذلك L_4 هي سالب الأعداد في L_2. عملية الإدماج تعطي قائمتنا العظمى Q على النحو التالي:

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 4,$$
$$-4, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, 5, -5, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{2}{5},$$
$$-\frac{2}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \ldots$$

القراء يجب ألا يجدوا مشقة كبيرة في مد هذه القائمة إلى عدد آخر من هذه الحدود.

إلى ما لا نهاية وما بعدها

شخصية Buzz Light Year في فيلم الأطفال قصة لعبة Toy Story تحضنا على السفر إلى ما لا نهاية وما بعدها، هي الشيء العزيز جدًّا على قلب علماء الرياضيات الذين اتخذوها عملهم لأكثر من قرن من الزمان، والآن لدينا فكرة جيدة وجميلة عما نتوقع عند الوصول إليها.

يوجد الكثير من المجموعات الكبيرة من الأعداد التي يمكن كتابتها في قائمة بالطريقة التي وصفناها في البند السابق. إحدى هذه المحموعات التي تحتوي Q هي مجموعة فصل جميع الأعداد الجبرية. هذه الأعداد هي حلول معادلات كثيرة حدود لها معاملات صحيحة (أي أن معادلة مثل $6x^3 + 5x^2 + 8x + 1 = 0$، حيث الأعداد المضروبة في قوى x هي أعداد صحيحة). كل عدد قياس $\frac{a}{b}$ هو حل لمعادلة بسيطة $bx - a = 0$، ومن ثم فهو جبري. نفس الشيء ينطبق على العدد $\sqrt{2}$ الذي هو حل للمعادلة $x^2 - 2 = 0$، ونفس الشيء بالنسبة $2^{1/3}$ أي الجذر التكعيبي للعدد 2 لأنه حل للمعادلة $x^3 - 2 = 0$. العدد غير الجبري هو بشكل ما غامض يسمى متساميًا. كما سنرى حالًا، الأعداد المتسامية ليست نادرة تمامًا بالرغم من أن إثبات أن عددًا ما متسامٍ هو صعب بشكل غير عادي.

العدد غير القياسي b الذي قُدم سابقًا هو عدد متسام (بالرغم من أن هذا أبعد عن أن يكون واضحًا) وكذلك العدد π. إثبات أن π ليست عددًا جبريًّا كان في القرن التاسع عشر بواسطة ليندمان Lindemann، ونتيجة لذلك استحالة تربيع الدائرة، بمعنى إذا أعطيت دائرة فمن المستحيل رسم مربع باستخدام حافة مستقيمة وفرجار، له نفس مساحة الدائرة المعطاة. الصعوبة تكمن في أن الأعداد المشيدة هي أعداد جبرية. تربيع الدائرة هو في الواقع تحدٍ لتشييد $\sqrt{\pi}$ إذا أمكنك تشييد $\sqrt{\pi}$ فيمكنك تشييد العدد المتسامي π، لكن من المستحيل تشييد عدد متسامٍ.

حتى إنه ليست جميع الأعداد الجبرية مشيدة. بالأخص $2^{1/3}$، هو عدد جبري غير مشيد وهذا يضع سؤالًا كلاسيكيًّا آخر: إذا أعطيت مكعبًا هل يمكنك تشييد (بناء) مكعب آخر له بالضبط ضعف حجم المكعب الأصلي؟ هذه مشكلة ديلان Delian الشهيرة: «المهمة التي حددها الرب حتى يبعد الطاعون عن أثينا.»

آخر هذه المشاكل الثلاث الكلاسيكية هو مهمة تثليث الزاوية أي تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أجزاء متساوية، فمع أن بناء زاوية °60 بسيط للغاية بهذا الشكل فمن المستحيل فعل ذلك مع زاوية °20. ومن ثم تمت الإجابة عن هذه المسائل الثلاثة بالنفي بعد أكثر من ٢٢٠٠ سنة من وضع هذه الأسئلة.

كثير من الناس يشعرون بالإهانة من كلمة مستحيل ويرفضون الاعتقاد في أي تصريح علمي يحتويها. الادعاءات المذكورة سابقًا يمكن جعلها أقل استفزازًا كالتالي: تبين أن الأعداد المشيدة لها خواص خاصة لا تتمتع بها جميع الأعداد، ونستطيع تحقيقها في الحالة الخاصة $2^{1/3}$ التي تفتقر إلى واحدة من هذه الخواص. هذا النص الخفيف يكون مؤثرًا بنفس جرأة الزعم أنه من المستحيل بناء ضعف المكعب في الحجم.

بالعودة إلى تحقيقاتنا الراهنة، فإننا كتبنا مجموعة الأعداد القياسية في قائمة، أي: الأعداد التي لها مفكوك عشري تكرار. سوف نثبت الآن أنه من المستحيل عمل قائمة مماثلة لجميع الأعداد الحقيقية — جميع المفكوكات

العشرية للأعداد بين 0 و1. إذا رغبت في ذلك. كيف نعرف أنه لا توجد طريقة لفعل ذلك، هذه الطريقة ببساطة لم نفكر فيها؟ نعلم لأن جورج كانتور Georg Cantor في نهاية القرن التاسع عشر، استحدث طريقته التي تسمى الحجة القطرية لإثبات أن هذا الأمر مستحيل. كل مكونات هذه الطريقة هي الملاحظة. وأوضح بعناية أكثر وفي لحظة أنه بالنسبة لأي قائمة لانهائية L من الكسور العشرية (بين 0 و1 مثلًا) من الممكن استخدام نفس القائمة لتشييد كسر عشري آخر بين 0 و1 غير موجود بالقائمة الأصلية L. هذا يبدو غير مؤذ تمامًا لكن ينتج من ذلك حالا أنه لا توجد قائمة تحوي كل عدد حقيقي بين 0 و1.

الحجة نفسها تجري بطريقة مشابهة. بفرض أن لديك قائمتك L، كل ما نحتاج إليه هو كتابة عدد a يختلف عن العدد الأول في القائمة L في المكان العشري الأول، ويختلف عن العدد الثاني في القائمة في المكان العشري الثاني، وهكذا ... يختلف العدد الذي ترتيبه n في المكان العشري رقم n. هذا العدد الذي تكوّن يختلف عن كل عدد في القائمة. إذا تخيلت أن كل الأعداد العشرية تعرض في القائمة L واحدًا بعد الآخر، فسنبني العدد a بالنظر إلى قطر قائمة العرض من أعلى اليسار إلى أسفل يمين وتتأكد أن a تختلف عن السطر النوني في المنظومة عند المكان الذي يقع في العمود النوني.

المجموعات التي لا يمكن كتابتها في قائمة تسمى غير قابلة للعد، والمجموعات التي يمكن كتابتها في قائمة تسمى قابلة للعد (بالرغم من كونها قد تكون لانهائية مثل مجموعة الأعداد القياسية). من الواضح أنه إذا كانت المجموعة A قابلة للعد، فكذلك أي مجموعة B محتواة داخلها، لأن لكتابة قائمة B تحتاج فقط قائمة A ونقرأ خلالها عناصر B ونكوّن قائمة للمجموعة B. ومن ثم إذا كانت S مجموعة غير قابلة للعد فإن أي مجموعة T تحتوي S غير قابلة للعد أيضًا (لأنه إذا كانت T قابلة للعد فإن S ستكون كذلك من الحجة السابقة) ومن ثم لأن مجموعة الأعداد الحقيقية بين 0 و1 ثبت أنها غير قابلة للعد فإن المجموعة R مجموعة كل الأعداد

الحقيقية تكون أيضًا غير قابلة للعد بالرغم من أن المجموعة Q للأعداد القياسية قابلة للعد. ولهذا فقد اكتشفنا بطريقة نوعية أن مجموعة الأعداد العشرية أكبر من مجموعة الأعداد القياسية.

ممكن إضافة أنه: ينتج من حقيقة أن مجموعة كل الأعداد الجبرية A قابلة للعد (ولم تثبت ذلك هنا ولكنه أصعب قليلًا من إثبات مجموعة الأعداد القياسية قابلة للعد) أن مجموعة كل الأعداد المتسامية T غير قابلة للعد. (إذا كانت T قابلة للعد فالمجموعة المكونة من A وT ستكون قابلة للعد، وهذا يناقض أن اتحادهما هو الأعداد الحقيقة المعروف أنها غير قابلة للعد.) هذه نتيجة هامة للغاية لأنها توضح أن T مجموعة غير قابلة للعد (وعلى الأخص لانهائية) دون معرفة أي من عناصرها. بكلمات أخرى، يمكننا معرفة وجود كثير من الأعداد المتسامية غير القابلة للعد دون معرفة هوية أي عنصر منها.

الفصل الثالث

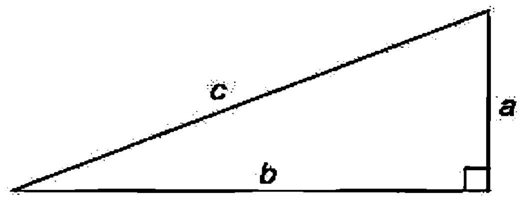
بعض الهندسة

في هذا الفصل نهدف إلى عرض القليل من نتائج كثيرة مشهورة في الهندسة الإقليدية، منها نظرية فيثاغورث وبعض نظريات الدائرة. براهين هذه النظريات على حالها تثير الدهشة والبهجة اليوم كما كانت قبل آلاف السنين، ويمكننا التأكد من أن أحفادنا البعيدين سيكونون مسحورين بأناقة البرهان.

سوف نبدأ مع فيثاغورث. هذه النظرية تربط الهندسة والجبر كحقيقة واحدة لا غير. هذه النظرية تعطي معنى جبريًّا للمفهوم المادي للمسافة، ومن ثم فحضورها موجود خلال الرياضيات والفيزياء — على سبيل المثال: النظرية النسبية الخاصة تعتمد عليها.

أهمية المربعات على جوانب المثلثات

نظرية فيثاغورث تنص على أن: «مربع الوتر c في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المرسومين على ضلعي القائمة a, b.» (شكل ١) ويمكن ملاحظة ذلك سريعًا بمقارنة صورتي المربعين في شكل ٢. كل صورة هي لمربع طول ضلعه $a + b$ ومن ثم يمثلان نفس المساحة. كل صورة تحوي أربع نسخ من المثلث القائم الزاوية المعطى، فإذا أزلنا هذه النسخ الأربعة فالمنطقة المظللة الباقية من كل صورة متساوية مع الأخرى.



شكل ١

من الواضح أن المنطقة المظللة الأولى هي $a^2 + b^2$ بينما في الصورة الثانية المنطقة المظللة هي c^2 وهذا ينهي البرهان.

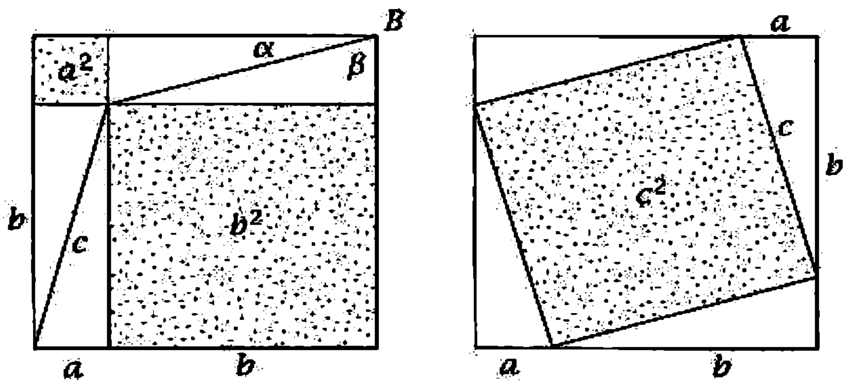
حقًّا إنه أمر سهل. لا أستطيع التفكير في سبب ما يدعو الجميع لعدم رؤية هذا البرهان في المدرسة. الواقع، إذا كان هناك خطأ في هذا البرهان فإنه يكون قد انتهى قبل معرفتك به. الشخص المتشكك قد يسأل: أين استخدمت بالضبط حقيقة أن المثلث له زاوية قائمة في البرهان في كل ذلك؟ إجابة هذا السؤال تكشف أن البرهان افترض على الأقل فرضًا خفيًّا. وهو الذي سنشرحه الآن.

نحن نحتاج إلى معرفة أن مجموع الزوايا الثلاث في المثلث القائم تساوي زاوية مستقيمة (°180) (هذا صحيح لأي مثلث كما سنرى بعد قليل) وهذا يبرر الادعاء بأن الشكل في اليسار والشكل المظلل في اليمين حقًّا مربعات. الزاوية عند B على سبيل المثال يجب أن تكون زاوية قائمة لأنها مجموع زاويتين حادتين α, β في المثلث القائم الزاوية أي أن مجموعهما $90^\circ = 90 - 180$، دعونا نثبت هذه الحقيقة الأساسية عن المثلثات.

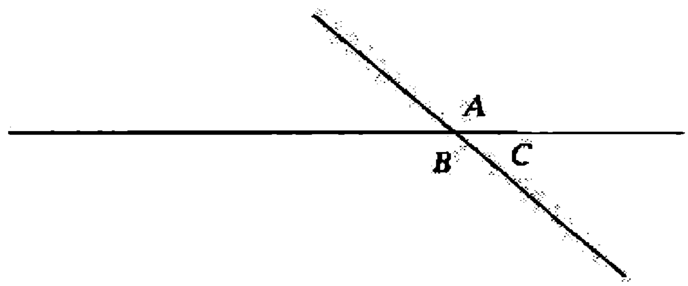
لنر ذلك، نحن في حاجة إلى بعض الخواص الأساسية للزوايا:

الخاصية ١: عندما يتقاطع مستقيمان فإن الزوايا المتقابلة بالرأس متساوية شكل ٣ وهذا يعني أن الزاويتين A, B متساويتان، وذلك لأن كلًّا من $A + C$, $B + C$ تساوي زاوية مستقيمة.

الخاصية ٢: عندما يقطع مستقيم خطين متوازيين فإن الزوايا المتناظرة متساوية (شكل ٤) هذا فرض واحد من قواعدنا الأساسية بدون برهان التي نبدأ بها. (أي نظام من الفرضيات يبدأ مع بعض البديهيات



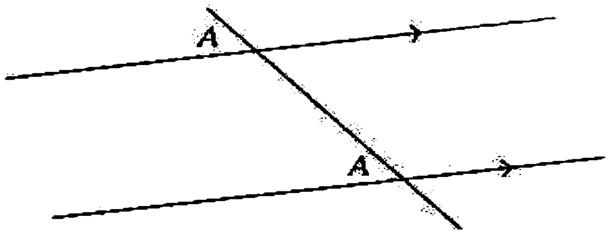
شكل ٢



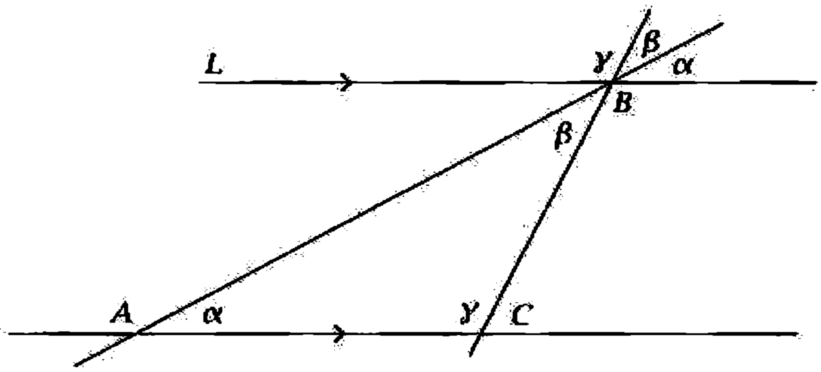
شكل ٣

بدون برهان. الرياضيات البحتة هي دراسة النتائج المترتبة على هذه البديهيات).

الآن ليكن ABC أي مثلث حيث زواياه هي α، β، γ (حروف الهجاء اليونانية وتنطق: «ألفا وبيتا وجاما» — وسوف تندهش عند رؤية هذه الرموز، لكن خذ نفسًا عميقًا ولا تنزعج منها) نحن نريد إثبات أن $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ أي قيمة زاويتين قائمتين. في شكل ٥ ليكن L الخط المستقيم المار بالنقطة B ويوازي الخط المستقيم AC مد الخطين AB وBC كما في الشكل. ويمكننا تعيين الزوايا الثلاث أعلى الخط L كما هو موضح، بالنسبة لـ β فهي واضحة من الخاصية ١ بينما الخاصية ٢ تشرح الاثنين الآخرين: قارن الزاويتين α وكذلك الزاويتين γ ثم تذكر أن L يوازي الخط AC. تبقى ملاحظة أن الزوايا الثلاث في السؤال تكوّن زاوية



شكل ٤



شكل ٥

مستقيمة عند النقطة B على الخط L والحصول على النتيجة المطلوبة أي أن $\alpha + \beta + \gamma = 180°$، وهذا هو المطلوب إثباته.

ومما سبق فقد أقمنا فيثاغورث على أساس متين. أحد الحقائق الجبرية الأدلة تنتج من هذه الهندسة. مساحة المثلث قائم الزاوية هنا هي $\frac{1}{2}ab$: وهنا أنت لا تحتاج الصيغة الشهيرة: $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع. لرؤية ذلك فإن نسختين من المثلث تكون بوضوح المستطيل الذي مساحته ab. مما سبق فإن المثلثات الأربعة في كل من المربعين الكبيرين تجمع معًا مساحة هي $2ab$. ومن ثم فالمربع على اليمين للصورة الأصلية له المساحة $(a+b)^2$ وهو أيضًا يساوي $c^2 + 2ab$. استخدم فيثاغورث لاستبدال c^2 بالقيمة $a^2 + b^2$ نحصل على:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab. \qquad (1)$$

هذه حقيقة جبرية بسيطة سوف نتحدث عنها أكثر في الفصل الخامس. إذا كنت مستعدًا لاستخدام هذه الحقيقة كنقطة بداية فيمكنك استنتاج فيثاغورث من صورة المربع في اليمين شكل ٢ وحدة، لكتابة مساحته كمجموع لأجزائه نحصل على:

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab,$$

باستخدام المتطابقة (1) نحصل على:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab.$$

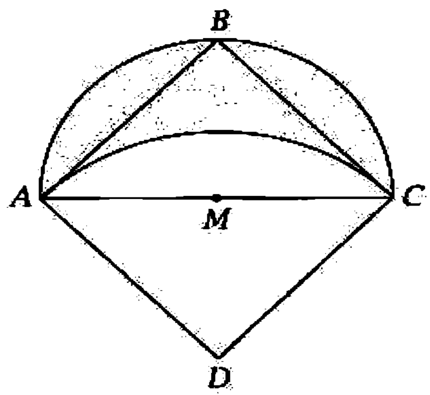
نحتاج الآن فقط أن نزيل الجزء غير المرغوب فيه $2ab$ من الطرفين فنحصل على فيثاغورث.

هذا البرهان يجمع بين الهندسة والجبر قد يكون أقل جمالًا من برهاننا الأصلي لكن قد يكون لديه ميزة في كونه أسهل تذكرًا. أنت في حاجة فقط لاستدعاء الصورة اليمنى في الشكل ٢ لاستنتاجه مرة أخرى.

فيثاغورث يكشف الحقيقة حول الدوائر:

قوة النتيجة دائمًا لا تكون واضحة من النظرة الأولى وقد لا يكون منافيًا للمنطق على الرغم من التوكيدات السابقة أن نقول إن نظرية فيثاغورث تبدو حقيقة مملة حول مثلث خاص جدًّا. لماذا نكون مهتمين برسم المربعات على جوانب المثلث في المقام الأول؟

الخبرة أثبتت أن العلاقة الفيثاغورثية تنشأ باستمرار في الرياضيات والفيزياء وأن أيًّا منهما لم تكن لتتقدم بدونها. وكمثال اكتشفت نتيجة غير متوقعة للنظرية في القرن الخامس قبل الميلاد بواسطة هيرودوت. في هذه المرحلة من التاريخ كانت الرياضيات تبحث في بعض الأسئلة المتطورة، على الأخص إيجاد المساحات الدقيقة للأشكال ذات الحدود المنحنية أو المنحنية جزئيًّا. ثبت أن هذا غير ممكن فالكثير منها مرتبط بالعدد ذي الطبيعة الغامضة π الذي لم يتم حلها لآلاف السنين، ولذلك كان من الصعب



شكل ٦

مقاومة النتيجة المتشائمة «أن من المستحيل إيجاد المساحة المضبوطة لأي شكل حدوده منحنية أو منحنية جزئيًّا.» هيرودوت أثبت أن الأمر ليس كذلك عن طريق ابتكار سلسلة من الأمثلة الذكية عن القطاعات الدائرية هلالية الشكل حيث يمكن إيجاد مساحتها بالضبط. أول هذه الأمثلة أتى من التأمل قليلًا حول حقيقة ما قاله فيثاغورث:

«المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الأضلاع الأقصر.» مع ذلك يمكن تطبيق النظرية نفسها إذا أنشأنا نصف الدائرة بدلًا من المربع. لماذا؟ مساحة نصف الدائرة التي نصف قطرها r هو $\frac{\pi}{2}r^2$ ومن ثم فإن مساحة نصف الدائرة المرسومة على الضلع a هي $\frac{\pi}{2}(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi}{8}a^2$ وبتعبيرات مماثلة لأنصاف الدوائر على الجوانب b, c، وحيث إن $a^2 + b^2 = c^2$ نحصل على: $\frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}c^2$ مما يوضح أن مجموع مساحتي أنصاف الدوائر المرسومة على الضلعين الأقصر هو مساحة نصف الدائرة على الوتر. وهذا ليس شيئًا خاصًّا لأنصاف الدوائر والمربعات. أي يمكننا الاستعاضة عن المربعات بأي أشكال مساحتها تتناسب مع مربع طول الضلع.

دعنا نتحقق من شكل ٦. يحتوي هذا الشكل على تكوين مربع $ABCD$ نصف قطره واحد صحيح مع نصف دائرة ABC مقامة على القطر AC، M هي نقطة منتصف القطر AC. نرسم أيضًا ربع دائرة

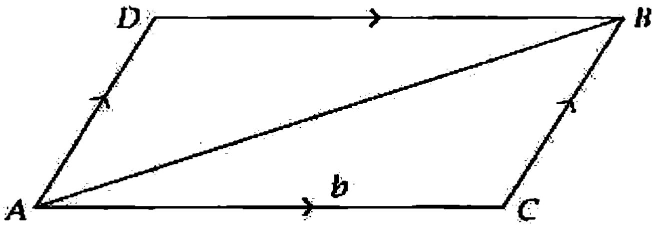
نصف قطرها DA من A إلى C سوف نحسب الآن مساحة الجزء المظلل في الشكل ٦.

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة المثلث ABC للأسباب الآتية. نحصل على مساحة القطعة الدائرية بطرح المنطقة الدائرية من ربع الدائرة الكبيرة التي وترها AC من المثلث ABC ثم إضافة القطعتين الدائرتين الأصغر الخارجتين. المنطقة الدائرية الكبيرة تشابه كلًّا من القطعتين الدائرتين الصغيرتين (أي أن لهما نفس الشكل ولكن الأولى أكبر). المثلثان ADC وAMB متشابهان لأن كلًّا منهما مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية. من نظرية فيثاغورث فإن مساحة القطعة الدائرية على وتر المثلث ABC تساوي مجموع مساحة القطعتين الدائرتين على الجوانب الأقصر. ومن ثم النتيجة النهائية للجمع والطرح هي الصفر. ومن ذلك نحصل على أن مساحة القطاع الدائري هي مساحة المثلث ABC وهي: $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

ما برهنه هيرودوت أنه من الممكن على الأقل أحيانًا، إيجاد مساحة الشكل المحدد تمامًا بأقواس من دوائر. هذا المثال الذي تم بناؤه في الشكل — يُمكن من رسم قطعة دائرة باستخدام حافة مستقيمة وفرجار. هذا قد يبعث الأمل في إمكانية تربيع الدائرة، أي أنه إذا أمكن إيجاد مساحة أي قطاع دائري، فيمكن إيجاد مساحة الدائرة ومن ثم قيمة π أيضًا يمكن تعيينها. هناك حدود لهذه الطريقة ومع ذلك فقد أوحى أن هيرودوت نفسه قدر هذه الطريقة. فقد استنبط ما يسمى بتربيع القطاعات الدائرية.

المثلثات والمساحات:

العدد π يعرف بأنه النسبة بين محيط الدائرة إلى نصف قطرها، لأن محيط الدائرة $2\pi r$ وr هو نصف القطر. بالتأكيد مضاعفة البعد الخطي لأي شكل مستوٍ سوف يزيد مساحته بعامل 4 وعلى العموم إذا ضاعفنا أبعاد الشكل بالعامل c، فإن مساحته تتضاعف بالعامل c^2. ونتوقع أن تكون مساحة الدائرة تتناسب مع r^2، ولكن ليس واضحًا لماذا ثابت التناسب مرة أخرى هو π. لرؤية لماذا يصبح هذا واضحًا سننظر مرة أخرى إلى المثلثات.



شكل ٧

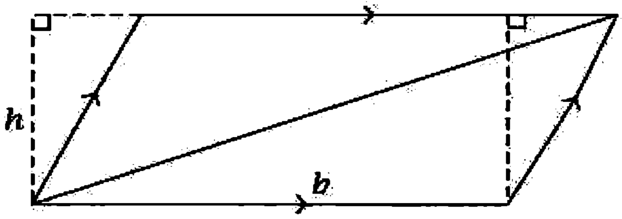
مساحة المثلث ABC هي نصف مساحة متوازي الأضلاع $ADBC$ الذي نتج عن دوران المثلث حول الضلع AB ولأن متوازي الأضلاع الناتج يتكون من نسختين من المثلث الأصلي (شكل ٧). مساحة متوازي الأضلاع هي bh حيث h هو ارتفاع المثلث، وهذا يمكن رؤيته لأنه يمكن قطع مثلث عند أحد نهايتي متوازي الأضلاع ووضعها عند الطرف الآخر ليكون bh مستطيلًا كما يتضح في (شكل ٨) ولذلك فإن مساحة المثلث ABC هي $\frac{1}{2}bh$. المدهش في هذا أن صيغة نصف القاعدة مضروبة في الارتفاع تنطبق أيضًا على الدائرة باعتبار أن القاعدة هي المحيط وأن الارتفاع هو المسافة من المحيط إلى المركز:

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2.$$

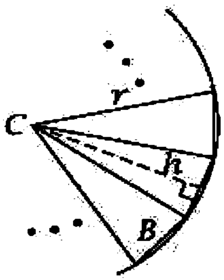
هذا يوحي أن نحاول تكوين مساحة الدائرة باستخدام أسلوب التثليث (تقسيمه إلى مثلثات).

خذ n من النقاط على مسافات متساوية على محيط الدائرة، المضلع المنتظم المكون من n من الأضلاع داخل الدائرة نعني «بالمضلع المنتظم» أن: (جميع الجوانب وجميع الزوايا متساوية). بتوصيل كل نقطة إلى مركز الدائرة فقد جزأنا المضلع إلى n من المثلثات المتساوية الارتفاع h والقاعدة B (شكل ٩).

مساحة هذا المضلع الداخلي هي $n(\frac{1}{2}Bh)$. من الواضح أن nB هو الطول الخارجي للمضلع وسوف نرمز له بالرمز b، ومن ثم فإن مساحة



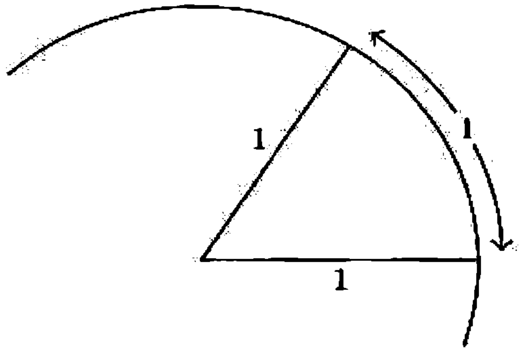
شكل ٨



شكل ٩

المضلع هي $\frac{1}{2}bh$. مساحة الدائرة هي القيمة النهائية — عندما تزداد n — لمساحة المضلع الداخلي لأن كل نقطة داخل الدائرة تقع داخل واحد من الأشكال الداخلية. القيمة النهائية للعدد b هو محيط الدائرة $2\pi r$ والقيمة النهائية للارتفاع h لكل مثلث هي r ومن ثم مساحة الدائرة هي: $\frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r^2$.

هذا رابط مريح عنده يمكن ذكر قياس الزوايا. الطريقة العملية هي تقسيم محيط الدائرة إلى 360 وحدة تعرف بدورها بأنها «درجات» هذا إلى حد ما اختياري لكن العدد 360 له العديد من العوامل. ومن ثم فإن أبسط أجزاء الدائرة يقابل عددًا صحيحًا من الدرجات. والأكثر من ذلك الدوران بدرجة واحدة هو أصغر جزء يلاحظ بالعين المجردة وهذا ما يجعله وحدة قياس نافعة. على أية حال، إذا كنت مهتمًّا بالخواص الهندسية للأشياء أكثر من قياسها فإن وحدة أخرى تكون أكثر مناسبة. طول محيط الدائرة التي نصف قطرها واحد هو 2π، ومن ثم يكون من السهل رياضيًّا وضع



شكل ١٠

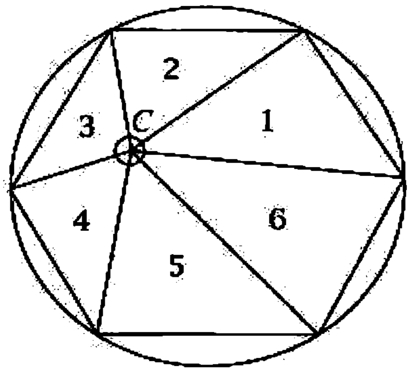
وحدة الدوران مقابل وحدة السفر حول المحيط. وحدة قياس الزوايا هذه تعرف باسم التقدير الزاوي. ومن ثم يوجد 2π من وحدات التقدير الزاوي في الدائرة (شكل ١٠).

من ذلك يكون قياس الزاوية المستقيمة هو π من التقدير الزاوي radians بينما الزاوية القائمة هي $\frac{\pi}{2}$. وحدة التقدير الزاوي تزيد قليلًا عن $57°$.

هناك فارق ضئيل إلى ما نحن بصدد القيام به، هو رمز واحد π، يتطلب في الكتابة مكانًا أقل من $180°$، ولهذا السبب سوف نستخدم التقدير الزاوي في هذا الفصل إلا إذا ذكر صراحة غير ذلك.

فكرة التثليث هذه، أي تقسيم الشيء الهندسي إلى مثلثات بطريقة خاصة قد تبدو ساذجة وبسيطة للغاية، لكنها مثمرة جدًّا في الهندسة، و«التوبولوجي» (فرع الرياضيات الذي يهتم بالخواص العامة للأشكال والفراغ). وقد تكون هناك صدمة لرؤية كثير من المسائل الصعبة في الرياضيات يمكن التعامل معها بنجاح مع الصبر والبناء من الحالات الخاصة إلى العامة.

بالمناسبة أذكر أنه مادمنا عرفنا أن مجموع زويا المثلث هي π من التقدير الزاوي ($180°$)، فإنه من السهل حساب مجموع زوايا أي مضلع. فمثلًا أي مضلع منتظم P في المستوى وله n من الجوانب (شكل ١١ نأخذ $n = 6$).



شكل ١١

يمكننا تقسيم P إلى n من المثلثات بتوصيل كل رأس إلى نفس النقطة C، داخل المضلع المنتظم. مجموع زوايا المثلثات هي $n\pi$ راديان. كل مثلث له واحدة من زواياه عند الرأس C وهذه الزوايا لا دخل لها بمجموع زوايا المضلع. على أية حال كل هذه الزوايا المركزية تكون دورة كاملة أي $2\pi\,(360°)$ لجميع الزوايا في المثلثات، ومن ثم فإن مجموع زوايا المضلع P تساوي $n\pi - 2\pi = (n - 2)\pi$، وخاصة مجموع زوايا أي شكل رباعي هو 2π راديان أو $360°$، طبعًا إذا أخذنا $n = 3$ نحصل مرة أخرى على مجموع زوايا المثلث $\pi = (3 - 2)\pi$.

نظريات الدائرة

المضلعات السداسية:

الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها C هي مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد عن C مسافة تساوي r. الدوائر هي أكثر الأشياء المتماثلة التي يمكن تخيلها في المستوى وبذلك فمن المتوقع أن يكون للدائرة بعض المميزات الخاصة.

واحدة من هذه المميزات ترتبط بالمضلعات السداسية. وكما هو معروف من فترة طويلة لنحل العسل وصانعي أغطية السرير (اللحاف) (شكل الفسيفساء) أنه من الممكن تقسيم المستوى إلى مضلعات

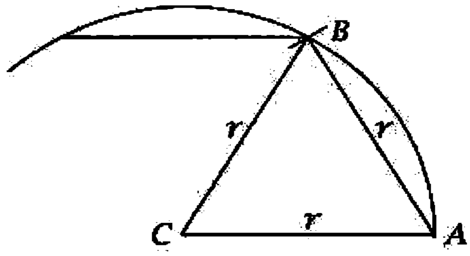
سداسية   أي أن المستوى يمكن تغطيته بمضلعات سداسية متطابقة بحيث لا تتداخل مع بعضها إلا عند الحافة، وهذه الخاصية تستغل في عملهم.

سوف أخرج عن الموضوع للحظة لأذكر أنه من الممكن أيضًا تغطية المستوى بمثلثات متساوية الأضلاع أو بمربعات، ولكن ليس بأي نوع آخر من المضلعات المنتظمة. ولنفترض أن هناك عددًا k مثلًا من مضلعات منتظمة ذات n من الأضلاع تتقابل في نقطة مشتركة لكي يتم تغطية المستوى (مثل الفسيفساء) فيكون مجموع الزوايا هو دائرة كاملة، 2π. أثبتنا سابقًا أن مجموع زوايا المضلع هي $(n-2)\pi$ أي أن كل زاوية تساوي $\frac{(n-2)}{n}\pi$ ومن ثم فإن k من هذه الزوايا تكوّن معًا دائرة كاملة، بمعنى أن:

$$\frac{k(n-2)}{2}\pi = 2\pi,$$

أي أن $k = \frac{2n}{n-2}$، حيث العدد k عدد صحيح، وهذا يكون صحيحًا فقط بقيم $n = 3,4$ أو 6 عند القيمة $n = 5$ نحصل على $\frac{10}{3}$ ولأي عدد آخر أكبر من 6 فإن القيمة تقع بين 2، 3. ومن ثم لا توجد تغطيات أخرى للمستوى بمضلعات منتظمة إلا هذه الثلاثة أي أن $n = 3,4,6$. يوجد العديد من طرق التغطية بالفسيفساء ولكنها ليست من هذا النوع على أية حال. نُسخ من أي مثلث يمكن أن تغطي المستوى (كون متوازيات الأضلاع باستخدام المثلث كما فعلنا سابقًا واكتشف سهولة عمل ذلك) المضلعات الثمانية والمربعات معًا يمكن أن تكون غطاء كاملًا بينما السداسيات والخماسيات معًا تكون شكلًا كرويًّا مثل كرة القدم. منذ بضع سنوات مضت أثبت روجر بنروز من جامعة إكسفورد أنه من الممكن تغطية المستوى بنسخ من اثنين من الأشكال البسيطة غير المنتظمة بحيث إن النمط لا يتكرر أبدًا — أي أن: التغطية تبدو مختلفة اعتمادًا على مكانك في المستوى.

بالعودة إلى المضلعات السداسية، نُصح المنجدون بتكوين المضلعات السداسية الأساسية لأغطية الفراش برسم دائرة وتوصيل نصف القطر إلى

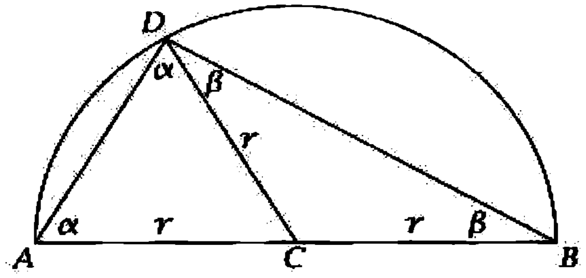


شكل ١٢

المحيط ست مرات ليعيطيهم رؤوس المضلعات السداسية. لقد سمعت مرة شخصًا (غير المنجد) يشرح هذا معتذرًا فيقول: «إن هذه الطريقة لم تكن دقيقة لكنها مناسبة عمليًّا.» والمدرب المشوش يذهب إلى القول في كلمات كثيرة، إن عدم دقته يرجع إلى عدم الدقة في أن 2π لا تساوي 6. هذا غير صحيح. فهي طريقة دقيقة (بالرغم من أن 2π فعلًا أكبر من 6) ويمكن للمرء بسهولة رؤية هذا كالتالي:

افتح الفرجار (البرجل) لمسافة نصف قطر الدائرة r ضع سن الفرجار عند A، اختر موضعًا على سطح الدائرة وضع النقطة B بحيث يقطع سن الفرجار الدائرة. النقطة C هي مركز الدائرة، فإننا نحصل على (شكل ١٢)، الملاحظة المهمة هي أن A, B, C تبعد كل منها عن الأخرى بمسافة r أي تكون مثلث متساوي الأضلاع. بوجه خاص الزاوية ACB هي $60°$ أي بالضبط $\frac{1}{6}$ من الدائرة الكاملة $360°$. ومن ثم فإن تكرار طول نصف القطر خمس مرات أخرى على المحيط سوف يعود بالضبط إلى نقطة البداية A وأن النقاط الستة على الدائرة ستكوّن مضلعًا سداسيًّا منتظمًا.

قد يكون هذا أبسط عدد من التماثل الجميل للدائرة يعرف باسم نظريات الدائرة. بالرغم من أن بعض هذه النظريات مدهشة تمامًا، فإن برهانها يستغل الخواص المميزة للدائرة أكثر وأكثر، خاصية أن جميع النقط على محيط الدائرة دائمًا على نفس المسافة r من مركز الدائرة مع حقيقة أن مجموع زوايا أي مثلث هي $180°$.

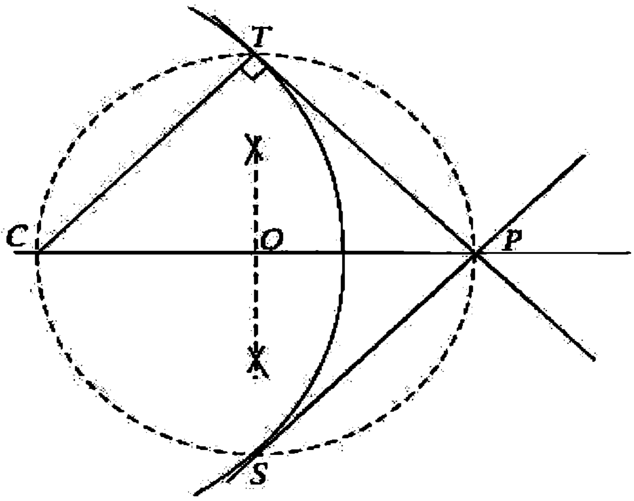


شكل ١٣

الزوايا في أنصاف الدوائر:

المثال التالي عن نظرية الدائرة هو أن الزاوية المرسومة في نصف الدائرة هي $90°$، بعبارة أخرى: عند تحرك النقطة D حول محيط الدائرة، بالرغم من تغير المسافات AD, BD، فهذه الزاوية لا تتغير أبدًا — يلتقي الخطان دائمًا عند زاوية قائمة حيث AB قطر الدائرة. (شكل ١٣) هذا يمكن رؤيته بسهولة بتوصيل النقطة D بمركز الدائرة C وهذا يُقسّم المثلث الكبير إلى مثلثين صغيرين متساويي الساقين، الأضلاع الثلاثة (AB, BC, DC) لها الطول المشترك r. كل من المثلثين المتساويي الساقين له زوج من الزوايا المتساوية رُمز لها α, β على الترتيب في شكل ١٣. ولهذا فمجموع زوايا المثلث الكبير هي $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$. أي أن $\alpha + \beta = 90°$ وهي الزاوية عند D.

هذه الحقيقة الخاصة تستخدم غالبًا في تكوين الفرجار القياسي والحافة المستقيمة. فمثلًا كيف ترسم مماسًا لدائرة (لأنه يوجد اثنان منهم) من نقطة خارجية للدائرة؟ أولًا تذكر طريقة بناء العمودي على منتصف الخط AC كما في (شكل ١) في الفصل السابق. أوجد مركز الدائرة بأخذ تقاطع الأعمدة المنصفة لأي وترين في الدائرة — صل المركز C بالنقطة P وأوجد النقطة O في منتصف CP (شكل ١٤) ارسم دائرة مركزها O ونصف قطرها OP سوف تقطع الدائرة الأصلية عند نقطتين T, S، والخطان PT, PS يمثلان المماسين المطلوبين.



شكل ١٤

لماذا؟ الخاصية المميزة للمماس للدائرة أنه يشكل زاوية قائمة مع نصف القطر عند نقطة التماس. الزاوية CTP زاوية قائمة عند النقطة T (مثلًا عند S) التي تقع على محيط الدائرة والتي قطرها CP.

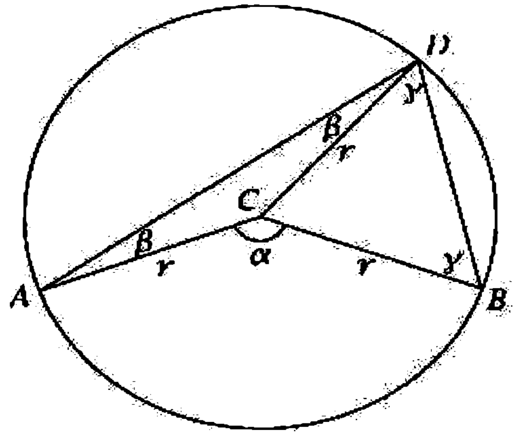
إن كون الزاوية في نصف الدائرة زاوية قائمة، هي حقيقة لافتة ومفيدة، لكنها فقط حالة خاصة من النظرية التالية.

الزوايا عند مركز الدوائر:

الزاوية عند مركز الدائرة ضعف الزاوية المحيطية المرسومة على نفس القوس أي أن: $\angle ACB = 2\angle ADB$.

هذه النظرية تحتاج بعض الشرح، والشكل المرافق ينبغي أن يقطع شوطًا في هذا الاتجاه. ليكن AB أي قوس في الدائرة (كما في الشكل ١٥). بالزاوية عند مركز الدائرة المقامة على هذا القوس،

نعني الزاوية ACB، فإذا كانت D أي نقطة على محيط الدائرة خارج القطاع الدائري ACB. الزاوية ADB هي ما تسميه الزاوية المحيطية المقابلة للقوس AB. النظرية تنص على أن: «مهما تحركت D على الدائرة من A إلى B فهذه الزاوية لا تتغير أبدًا وتساوي دائمًا نصف الزاوية



شكل ١٥

المركزية ACB. خصوصًا إذا كانت A, C, B على استقامة واحدة، أي كل الزوايا على نفس الخط المستقيم؛ فإن القوس AB هو نصف دائرة والزاوية ACB هي زاوية مستقيمة والزاوية ADB زاوية قائمة.»

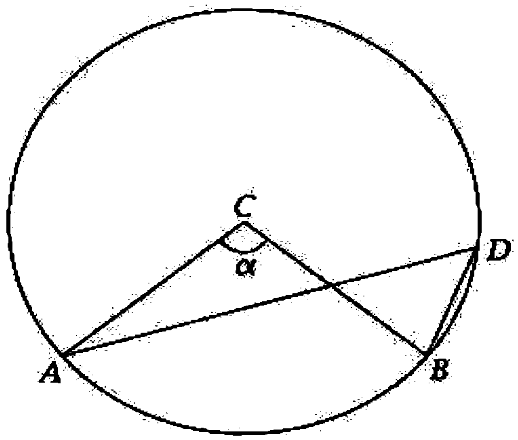
لإثبات صحة النظرية، انظر إلى الشكل ١٥ ولاحظ أن الطريقة المستخدمة كما في نظرية نصف الدائرة السابقة فإننا نحدد أنصاف أقطار الدائرة وكذلك أزواج الزوايا المتساوية. ويصبح المطلوب اختبار أن $\alpha = 2(\beta + \gamma)$. حيث إن مجموع زوايا أي مثلث هي π فإن الزوايا بدون تسمية عند C لها القيم $(\pi - 2\gamma)$ و$(\pi - 2\beta)$ على الترتيب. ولأن مجموع الزوايا الثلاث عند C هو 2π نحصل على:

$$(\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) + \alpha = 2\pi$$
$$\Longrightarrow 2\pi + \alpha - 2\beta - 2\gamma = 2\pi,$$

بحذف 2π من طرفي المعادلة نحصل على:

$$\alpha = 2\beta + 2\gamma = 2(\beta + \gamma).$$

هذا هو الدليل لكن ليس كل البرهان لأن شكل ١٥ لا يمثل جميع الحالات. عند تحرك النقطة D مثلًا حول الدائرة في اتجاه عقارب الساعة فستكون



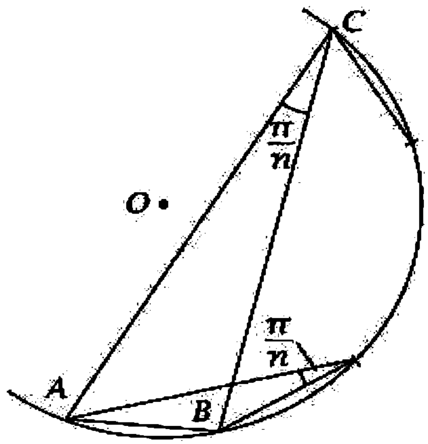
شكل ١٦

A, C, D على خط مستقيم واحد. الإثبات السابق ينطبق أيضًا على هذه الحالة — الزاوية β تصبح صفرًا ولا يتغير أي شيء آخر. على أية حال، باستمرار D في التحرك حول الدائرة فالمركز C يظهر خارج المثلث ABD كما في الشكل ١٦. هذه تمثل حالة مختلفة حقًّا، ومن ثم تحتاج إلى برهان مختلف (بالرغم من أنها مشابهة) وسوف أهملها، ويبين الشكل أن الزاوية α ما زالت ضعف الزاوية ADB.

ما زال هناك جانب واحد لمواجهته. بالعودة إلى الشكلين ١٥، ١٦. عندما D تتحرك حول المحيط من A إلى B الزاوية ABD يمثلها دائمًا $\frac{\alpha}{2}$. على أية حال عندما D تمر على B يوجد عدم اتصال — أو قفزة مفاجئة إذا رغبت. الزاوية ADB ما زالت نصف الزاوية المركزية لكنها الآن الزاوية المنعكسة ACB التي تستخدم. فمثلًا بقياس الدرجات، نعود إلى الشكل ١٥ ونفرض أن الزاوية $ACB = 140°$، فتكون الزاوية $ADB = 70°$ حتى تمر D فعلًا على B وتدخل القطاع الأسفل للدائرة، حيث تصبح فجأة:

$$\angle ADB = \frac{1}{2}(360 - 140)° = \frac{1}{2}220° = 110°$$

وتظل على هذه القيمة حتى تمر D على A حيث تعود القيمة $70°$.

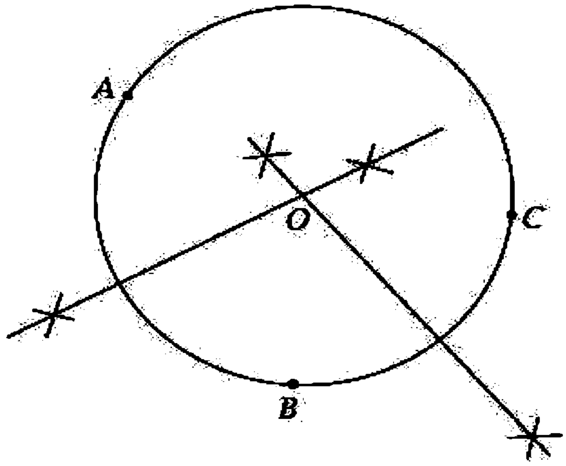


شكل ١٧

حقيقة الزاوية ADB هي نفس أي نقطة D يعبر عنها بالقول إن الزاويتين المقابلتين لنفس القوس، (القوس AB في هذه الحالة) متساويتان. وهذا له تأثير على المضلع المنتظم، بالرغم من أن الصلة قد لا تبدو تامة الوضوح. سوف يكون لدينا سبب لاستدعائها عندما نتكلم عن النسبة الذهبية ولذا سوف نلفت الانتباه إليها هنا.

ليكن P أي مضلع منتظم وله n من الجوانب وC أحد أركان P، وكذلك AB هو أحد أضلاع P (شكل ١٧). لا يهم أي ركن أخذت لـ C، الزاوية ACB ستظل هي نفسها دائمًا وتساوي $\frac{\pi}{n}$ لننظر لماذا هذا صحيح. خذ دائرة وتخيل تشكيل مضلع منتظم له n من الجوانب وذلك بوضع عدد n من النقاط على أبعاد متساوية على محيط الدائرة، فإذا كان AB ضلعًا، وC زاوية كما في الشكل السابق؛ نرى أن الزاوية ACB هي الزاوية المقابلة للقوس AB من الدائرة، ومن ثم تساوي نصف الزاوية عند المركز. ولأن نقاط P موزعة بالتساوي حول الدائرة فإن الزاوية عند المركز هي $\frac{2\pi}{n}$ ومن ثم تكون ACB هي $\frac{\pi}{n}$ وهذا يثبت الفرض.

ونتيجة أخرى من السهل عرضها الآن وهي أن مجموع الزاويتين المعاكستين فيما يسمى الرباعي الدائري هو $180°$. الرباعي الدائري Q هو الشكل الرباعي الذي يمكن رسمه داخل الدائرة. ليست جميع الأشكال



شكل ١٨

الرباعية لها هذه الخاصة. فمن الصحيح أن أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة — أي لا تقع على نفس الخط — تقع على دائرة وحيدة ويمكن بسهولة إنشاء هذه الدائرة كالتالي:

المركز O لأي دائرة تمر بالنقط A, B, C تبعد بمسافة متساوية عن كل من النقاط الثلاث. المنصف العمودي للقطعة المستقيمة AB يتكون من جميع النقاط على أبعاد متساوية من A, B، ومن ثم O يجب أن تقع على هذا المنصف وبنفس هذا المنطق يجب أن تقع على المنصف العمودي على BC أيضًا، أي أن O هي نقطة تقاطع العمودين على AB, BC (شكل ١٨). وكذلك فإنه بالطبع O يجب أن تقع على العمود المنصف للوتر AC. أي أن المنصفات الثلاث لها نفس الخاصية، بمعنى أنها مستقيمات تتقابل في نقطة واحدة. بالنسبة إلى ABC وحيث إن أي ثلاث نقاط تحدد مثلثًا، فالمقولة التالية تكون صحيحة «الأعمدة المنصفة لجوانب أي مثلث تتقابل في نقطة واحدة.»

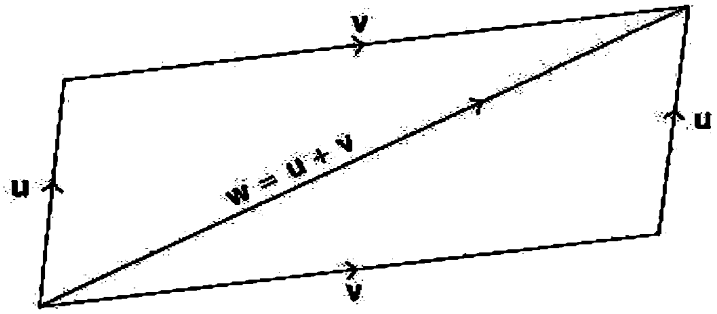
الآن لأي شكل رباعي $Q = ABCD$ مجموع زواياه هو $360°$ كما رأينا توجد دائرة وحيدة لها القوس ABC، وفي الحالة العامة، لا يوجد سبب يمنع من وقوع الرأس الرابع D على الدائرة. إذا حدث نقول إن Q هو شكل رباعي دائري، ويتمتع Q بخاصية إضافية ذكرت سابقًا: «كل

زوج من زاويتين معاكستين هما متكاملتان، أي مجموعهما °180». ويمكن للقراء إقناع أنفسهم بسهولة عن طريق رسم صورة مناسبة وربط كل ركن بمركز الدائرة، وبذلك تتكون أربع مثلثات متساوية الساقين. عين كل الزوايا — الزوايا المتساوية يرمز لها بنفس الرمز — وستجد أن مجموع كل زاويتين معاكستين متساوٍ، أي أن كل زوج مجموعه $\frac{1}{2}(360°)$.

الهندسة الإقليدية لا يهتم بها كثيرًا في المدارس في الوقت الحاضر. وينظر إلى الهندسة أساسًا خلال وجهة نظر ما يسمى بالهندسة التحليلية. وهذا النهج ابتدعه رينيه ديكارت، ويمكن الادعاء بأنه نجح نجاحًا كبيرًا. الفكرة الأساسية هي العمل دائمًا داخل إطار مستطيل من الإحداثيات — أي زوج من المحاور x, y. الخطوط والمنحنيات يتم التعامل معها من خلال معادلات تربط بين إحداثيات نقطها. فمثلًا أي خط مستقيم يتكون من جميع النقاط (x, y) في المستوى التي تحقق المعادلة $y = mx + c$. حيث m تقيس ميل الخط بينما العدد c يخبرنا أين يقطع الخط محور y. هذا النهج في الواقع يسمح لنا بتشفير الهندسة كالجبر، ومن ثم النظريات الهندسية تتحول لتصبح تحقيقات جبرية. من المؤكد أن هذا جيد لترسيخ أقدام الطلاب في الجبر، ويتيح الإعداد الجيد لتعلم حساب التفاضل والتكامل. وهي جامدة قليلاً، ومع ذلك يمكن أن تنتج طلابًا ذوي أفق رياضي ضيق. يوجد فقدٌ حقيقي بالاستخدام الحصري لهذا النهج في الهندسة. كثير من الهندسة الأساسية من الأحسن معاملتها من خلال حدودها. فنتائج مثل التي رأيناها توًّا أكثر وضوحًا وفهمًا دون الرجوع إلى الإحداثيات.

المتجهات

هناك نوع من الحل الوسط بين الهندسة الكلاسيكية والهندسة الإحداثية وجد في استخدام المتجهات. هذا المفهوم له أهمية هائلة في الفيزياء الرياضية. سوف نكتفي هنا بتقديم الفكرة وإعطاء مثال يوضح طريقة استخدامه عندما يكون المطلوب شرح أنواع معينة من الحقائق الهندسية.

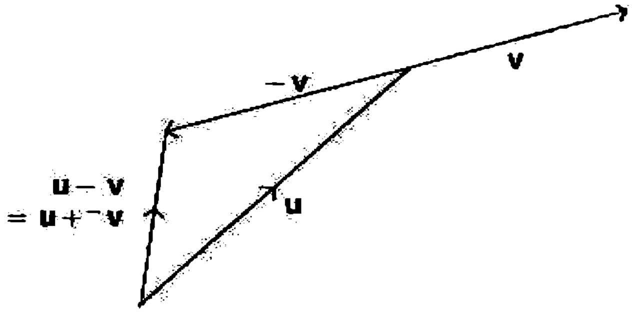


شكل ١٩

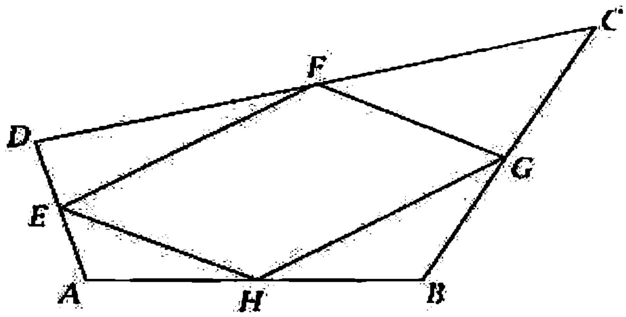
لتحقيق هذا الهدف سوف نعتبر المتجه نتيجة لبعض التوجيهات يتحرك لمسافة معينة في اتجاه معين. على هذا النحو، المتجه **v** يعتبر كسهم طوله المسافة التي قطعها واتجاهه هو اتجاه رأس السهم. يمكن جمع متجهين **u**,**v** معا لتكوين متجه جديد **w** = **u** + **v** (شكل ١٩). السهم للمتجه **w** نحصل عليه. بوضع **u** أولا ثم وضع ذيل المتجه **v** على قمة المتجه **u** وتكوين السهم الذي ذيله هو نفس ذيل **u** وقمته هي قمة **v**. المتجهات **u**,**v** يمكن جمعهم في الترتيب العكسي بنفس النتيجة النهائية. في كلا الحالتين متجه المجموع **w** يناظر القطر المتجه لمتوازي الأضلاع (كما هو واضح في الشكل ١٩).

يمكننا أيضًا ضرب المتجه في عدد: مثلًا 3**v** تعني متجه في نفس الاتجاه مثل **v** لكن ثلاثة أمثال طول **v**؛ المتجه −2**v** هو مضاعف للمتجه **v** في الطول لكن في الاتجاه العكسي لاتجاه **v** نظرًا لوجود الإشارة «−» (شكل ٢٠). هذا يعطينا إطارًا جبريًّا بسيطًا لدراسة متجهاتنا. ويجدر بنا ذكر أننا إذا جمعنا **v**, −**v** فإننا نرجع إلى نقطة البداية. نمثل هذا بأنه المتجه الصفري **0**، له المقدار 0 وليس مثل باقي المتجهات لا اتجاه له. لأن المتجه −**v** له معنى يمكننا استخدامه في عملية طرح المتجهات **u** − **v** وتعني **u** + $^{-}$**v** كما يحدث في حالة الأعداد العادية 3 − 2، يمكن استخدامها اختصارًا بدلًا من ($^{-}$3) + 2.

وهذا يكفي لعرض واحدة من الحجج الأساسية للأساليب المستخدمة مع المتجهات. لدينا هدف هندسي دعنا ننظر إلى النقطتين A, B إلى هذا



شكل ٢٠



شكل ٢١

الهدف ثم نتحرك حول الشيء من A إلى B بطريقتين مختلفتين مع وصف الطرق كمجموع لمتجهين أو أكثر. ثم نساوي مجموعي المتجهات لأن كلًّا منهما يساوي المتجه **AB** من A إلى B. من هذه المعادلة المتساوية يمكن الاستدلال على هذا التساوي غير الواضح.

كمثال دعونا نثبت الحقيقة المدهشة التالية: لتأخذ أي شكل رباعي $Q = ABCD$ (كما هو واضح في شكل ٢١)، يمكننا إثبات أن الشكل الرباعي $EFGH$ المتكون بتوصيل منتصفات أضلاع Q هو في الحقيقة متوازي أضلاع أي نقول إن EF يساوي ويوازي HG وFG يساوي ويوازي EH.

وفي البداية نثبت أن الضلعين EF، HG مثلًا متوازيان ومتساويان. ونلاحظ أن المقصود به تحقيق المساواة بين المتجهين **EF**، **HG**، أي نبحث عن معادلة اتجاهية (معادلة تربط المتجهات) تربطها معا. يمكننا كتابة

واحدة فورًا الانتقال من A إلى C مرورًا بــ E وF ومرة أخرى من A إلى C بالمرور على H، G، وينتج لدينا اثنان من مجموع المتجهات متساويان وكل منهما يساوي AC

$$\mathbf{AE} + \mathbf{EF} + \mathbf{FC} = \mathbf{AH} + \mathbf{HG} + \mathbf{GC}. \qquad (2)$$

هذا يبدو واعدًا لأن (2) بها **EF** في جانب، **HG** في الجانب الآخر. لكن توجد أربعة حدود أخرى نحاول التخلص منها، أكثر من ذلك يجب استخدام حقيقة أن النقط E, F, G, H هي منتصفات أضلاع Q ولهذا يجب التفكير قليلًا.

لدينا أيضًا معادلة للمتجهات هي:

$$\mathbf{AD} + \mathbf{DC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}.$$

لأن E منتصف AD نكتب: $\mathbf{AD} = 2\mathbf{AE}$ وبالمثل مع باقي الحدود نحصل على:

$$2\mathbf{AE} + 2\mathbf{FC} = 2\mathbf{AH} + 2\mathbf{GC}. \qquad (3)$$

بتقسيم طول المتجهات في (3) نحصل على:

$$\mathbf{AE} + \mathbf{FC} = \mathbf{AH} + \mathbf{GC}. \qquad (4)$$

بالعودة إلى (2)، لأن المتجهات يمكن جمعها دون الاعتماد على الترتيب. ويمكن كتابة المعادلة السابقة في الصورة:

$$\mathbf{EF} + (\mathbf{AE} + \mathbf{FC}) = \mathbf{HG} + (\mathbf{AH} + \mathbf{GC}). \qquad (5)$$

فإن المتجهين بين الأقواس على جانبي (5) متساويان ومن ثم نحصل على:

$$\mathbf{EF} = \mathbf{HG}.$$

وبنفس الطريقة يمكنك تحقيق أن FG = EH أي أن منتصفات الجوانب لأي شكل رباعي تكون متوازي أضلاع.

وهناك مثال آخر من خلال نفس الخطوط السابقة وهي حقيقة أن الأقطار في متوازي الأضلاع تتقابل عند منتصفاتها. يمكنك إقناع نفسك باستخدام منهاج مشابه: ابدأ عند أحد الأركان وانتقل إلى نقطة المنتصف لكل قطر وشفر كل رحلة على أنها مجموع متجهات. يبقى لك تحقيق أن هذين المجموعين للمتجهات في الحقيقة متساويان أي أن منتصفي القطرين ينطبقان.

الفصل الرابع

الأعداد

الأعداد تحمل نوعًا من السحر لمعظم الناس، وقد دُرِست باستفاضة لعدة قرون ولا يزال هناك بعض الأسئلة البسيطة عن الأعداد العادية التي لا يعرف إجاباتها أحد، بعض هذه المسائل حاسمة لكل فروع الرياضيات ويبدو البعض الآخر فضولًا. سوف أقدم عينة من هذه الأسئلة في هذا الفصل.

الصعوبة في دراسة الأعداد أن هناك عددًا لانهائيًّا منها وكلها مختلفة، هذه قد تبدو ملاحظة ممجوجة لكن سوف نعرض لمثال بسيط عن هذه الصعوبات التي تسببها. العدد 12 هو (عدد زائد) بمعنى أن مجموع عوامله (غير 12) أكبر من العدد نفسه: $16 = 6 + 4 + 3 + 2 + 1$. هل يوجد أعداد فردية (زائدة)؟ بتجربة صغيرة مع الأعداد الفردية الصغيرة تقنعك أن الإجابة هي: لا. يمكنك بعد ذلك أن تُمضي من الوقت ما شئت تبحث عن برهان لإثبات هذه المسألة المفتوحة ولن تجد أبدًا برهانًا لأنه فعلًا يوجد أعداد فردية زائدة — تحتاج فقط للبحث بعمق أكثر مما تتوقع لإيجاد هذه الأعداد. أعتقد أن العدد الأول — من الذاكرة — هو 945 حيث مجموع عوامله:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63$$
$$+ 105 + 135 + 189 + 315 = 975.$$

وحتى اليوم لا يعرف أحد هل يوجد عدد فردي كامل بمعنى أن العدد يساوي بالضبط مجموع عوامله. توجد أعداد زوجية كاملة مثل 6, 28, 496

وعليكم التحقق من ذلك بأنفسكم. الأعداد الزوجية الكاملة مفهومة جيدًا منذ أن أثبت أويلر في القرن الثامن عشر أنها في تناظر واحد لواحد مع ما يسمى أعداد ميرسين الأولية. أي عدد أولي على الشكل $(2^p - 1)$ حيث p عدد أولي. إذا أعطيت عدد ميرسين أولي يمكنك إيجاد عدد زوجي كامل وأثبت أويلر أن كل عدد زوجي كامل ينشأ بهذه الطريقة. الربط بين الأعداد الكاملة وأعداد ميرسين الأولية يعود إلى إقليدس، ولكن لا أحد يعرف هل يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية من هذا النوع الخاص أم لا.

ولعلكم تدركون أن هيكل الأعداد مرتبط بالأعداد الأولية، ولهذا ستكون هذه نقطة البداية. موضوع هذا الفصل هو مجموعة أعداد العد الموجبة $\{1, 2, 3, \ldots\}$. حتى الصفر لا يسمح بدخوله منقاشتنا إلا بدعوة صريحة.

العدد p يكون أوليًا إذا كان لديه عاملان فقط أحدهما p نفسه والآخر هو الواحد «1». العدد 1 لا يحسب مع الأعداد الأولية لأن له عاملًا واحدًا فقط ومن ثم فإن الأعداد الأولية الأولى هي: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$. العدد المكون من أكثر من عاملين يسمى: «عددًا مركبًا».

الأعداد الأولية لبنات البناء الضربي في أعداد العد لأنه من الواضح أن أي عدد إما أن يكون أوليًا أو يمكن كتابته كحاصل ضرب أعداد أولية، فمثلًا: $60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5$ ويمكننا أن نقول $2^2 \times 3 \times 5$ هو تحليل العدد 60 إلى أعداد أولية. كيف نعرف أنه لا يوجد تحليل آخر؟ ربما من الممكن أن نحلل بعض الأعداد كحواصل ضرب لأعداد أولية بطرق مختلفة تمامًا. إن معظم الناس متأكدون من أن هذا ليس هو الحال والواقع يشعر بإهانة بسيطة لهذا الاقتراح الغريب. إذا كانت الأعداد خاضعة لهذا السلوك السيئ فإنه من المؤكد أن يكونوا قد سمعوا بذلك.

هذا صحيح تمامًا، لكن وجود تحليل وحيد بعوامل أولية غير واضح مع أنه قد يكون مألوفًا. هذا يتوقف على الخاصية التالية للأعداد الأولية.

تمهيدية إقليدس: إذا كان العدد الأولي p هو أحد عوامل حاصل الضرب ab فإن p تكون عاملًا في a أو عاملًا في b (وربما هي عامل في كليهما).

الأعداد المركبة ليس لديها هذه الخاصية فمثلًا، 6 هي عامل في $72 = 9 \times 8$ ولكنها ليست بعامل لأي من العدد 8 أو العدد 9. لقد استخدمت تمهيدية إقليدس بطريقة غبية قليلًا. في الفصل الثاني حيث أثبت أن $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي. قلت هناك: «إذا كانت 2 عاملًا في a^2 فإن a نفسها يجب أن تكون زوجية.» نحصل على ذلك من تمهيدية إقليدس بوضع $p = 2$ العدد الأولي الزوجي الوحيد، بأخذ $b = a$. والواقع إن استخدام تمهيدية إقليدس يجعل من السهل تعميم حجة أن $\sqrt{2}$ غير قياسي لإثبات أن $\sqrt{p}$ غير قياسي لأي عدد أولي p.

إذا أخذنا تمهيدية إقليدس كمُسَلَّمَة، فمن السهل أن نقنع أنفسنا أنه من المستحيل أن نجد أربعة أعداد أولية مختلفة p, q, r, s بحيث تحقق أن $pq = rs$. لنفرض أن هذا يمكن أن يتحقق. حيث إن p أحد عوامل pq فإنه أيضًا عامل في rs، وباستخدام إقليدس فإن p عامل في r أو عامل في s. لنفرض أنه عامل في r، على أية حال العدد الأكبر من 1 يكون عاملًا في العدد الأولي r فقط إذا كان يساوي r لأن r عدد أولي، ولهذا فإن $p = r$ ويمكن حذف العامل المشترك في المعادلة $pq = ps$ ونحصل على $q = s$ أيضًا. ولهذا فإن التحليلين الأوليين أصبحا نفس الشيء، وهذا يمكن تعميمه لأي عدد من العوامل الأولية دون أي صعوبة حقيقية: افرض أن: $p_1p_2\ldots p_n = q_1q_2\ldots q_m$ حيث كل ps وqs أعداد أولية وافرض أنه من الملائم ترتيب ps وqs تزايديًّا (هذا لا ينفي إمكانية أن اثنين أو أكثر من ps متساويان، ونفس الشيء بالنسبة لـ qs) باستخدام تمهيدية إقليدس يمكن أن نستنتج أن $p_1 = q_1$ كما سبق فنحذفهما ونكرر هذه الحجة $n - 1$ من المرات للحصول على النتيجة أن عدد n من العوامل الأولية في الطرف الأيسر يجب أن تتطابق تمامًا مع عدد m من العوامل الأولية في الطرف الأيمن وأن: $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots$.

نستنتج من ذلك، بفرض صحة تمهيدية إقليدس، أنه لا توجد إلا طريقة واحدة لتحليل أي عدد كحاصل ضرب أعداد أولية.

بعد قليل سوف أثبت تمهيدية إقليدس بطريقة غير متوقعة، من خلال استخدام خوارزمية إقليدس لحساب القاسم المشترك الأعظم لعددين. قبل أن أجرؤ على هذا الموضوع سوف أقدم سؤالًا واحدًا زيادة: هل يوجد حقًّا عدد لانهائي من الأعداد الأولية؟

هذه غير واضحة كما كنت تتوقع أنه لا تكفي الحُجة بما أنه يوجد ما لا نهاية من الأعداد وكل منها يكتب كحاصل ضرب لأعداد أولية فيجب أن يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية. بعد كل ذلك يوجد ما لا نهاية من قوى العدد 2 مثلًا $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ لكن يوجد فقط عدد أولي واحد بينها هو العدد 2. موجود في التحليل الخاص بها كلها. لذلك لا يتضح فورًا أنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية. نظريًّا يمكن أن يكون هناك عدد ثابت من الأعداد الأولية، مثلًا عشرة حيث كل عدد هو حاصل ضرب من هذه العشرة أعداد الأولية. ومع أن عددًا كبيرًا يحوي قوى كبيرة لبعض هذه الأعداد الأولية. أنا متأكد أنك لا تزال تعتقد ألا شيء من هذا القبيل صحيح، لكن لأنه لا توجد قائمة لانهائية من الأعداد الأولية يمكننا أن نعود إليها، كيف يمكننا التأكد من أن الأعداد الأولية سوف تنتهي بعد وقت ما؟ نحن نعلم لأن الحجة البسيطة التالية وجدت في إقليدس.

لتكن $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ترمز لـ n من الأعداد الأولية الأولى، فمثلًا إذا كانت n هي 10 فإن هذه القائمة ستكون $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ ضع N هي حاصل ضرب n من الأعداد الأولية واعتبر: $N + 1 = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. الآن كل عدد بما فيها $N + 1$ لها بعض العوامل الأولية. على أية حال لكل من الأعداد الأولية p في قائمتنا، $\frac{N}{p}$ عدد صحيح (لأن p أحد عوامل N) ومن ثم فإن $\frac{N+1}{p} = \frac{N}{p} + \frac{1}{p}$ ليس بعدد صحيح. ومن ذلك ينتج أنه بالرغم من أن $N + 1$ لها على الأقل عامل أولي واحد، فلن يكون أي من الأعداد الأولية $p_1, p_2, \ldots, p_n$، ومن ثم فهي أكبر منها كلها، ومن ثم يوجد عدد أولي q يقسم $N + 1$ بحيث إن $p_n < q \leq N + 1$ على الأخص هذا يثبت أنه في أي قائمة للأعداد الأولية

$p_1, p_2, \ldots, p_n$، يوجد دائمًا على الأقل عدد أولي ليس في القائمة ومن ثم فإن مجموعة الأعداد الأولية يجب أن تكون لانهائية.

إيجاد القاسم المشترك بالطرح

تعلمنا جميعًا في المدرسة عن القاسم المشترك الأعظم d (h.c.f) لأي عددين a وb. فمثلًا للعددين $a = 12, b = 8$ نجد أن $d = 4$. نشأت الفكرة عند البحث عن أقل مقام مشترك حتى نجمع عددين يحتويان كسورًا. إذا كانت المقامات في السؤال هي a وb فإن أقل مقام مشترك هو أقل حاصل ضرب مشترك للعددين a وb، وهو يساوي $\frac{ab}{d}$. في المثال السابق هذا يساوي $24 = 12 \times 2 = \frac{(12\times8)}{4}$.

كيف نجد d؟ أنا شخصيًّا لا أذكر كيف أوجدناه، مع أن d يمكن التعبير عنه ببساطة شديدة باستخدام التحليل لأعداد أولية لكل من a وb، فعلى سبيل المثال إذا كانت: $a = 2058 = 2 \times 3 \times 7^3$ و$b = 3675 = 3 \times 5^2 \times 7^2$ فإن $d = 3 \times 7^2 = 147$: العوامل الأولية لـ d هي بالضبط العوامل الأولية المشتركة لكل من a وb. والقوة المرفوع إليها كل عدد أولي موجود في تحليل d هي أقل القوتين للعدد الأولي في تحليل a وb. مع أن هذا يحل المسألة فإنه يحتوى على عمل أكثر من الضروري. من الممكن إيجاد d دون تحليل a أو b وهذا مهم لأنه في الحالة العامة من الصعب جدًّا إيجاد المعاملات الأولية لعدد كبير مع أنه — ومن حيث المبدأ — يمكن عمل ذلك من خلال التجربة والخطأ.

عملية إيجاد أكبر قاسم مشترك d للعددين a وb تسمى خوارزمية إقليدس وتجري على النحو التالي:

(١) اطرح العدد الأصغر من الأكبر.
(٢) اترك العدد الأكبر وكرر العملية في الخطوة (١) مع العددين الباقيين.
(٣) استمر حتى يصبح العددان المتبقان متساويين وهذا هو العدد النهائي d.

لنطبق هذه الخوارزمية لزوج الأعداد $(3675, 2058)$. أزواج الأعداد التي نحصل عليها تظهر كالآتي:

$$(3675, 2058) \longrightarrow (2058, 1617) \longrightarrow (1617, 441) \longrightarrow (1176, 441)$$
$$\longrightarrow (735, 441) \longrightarrow (441, 294) \longrightarrow (294, 147)$$
$$\longrightarrow (147, 147);$$

ومن ثم في هذا المثال $d = 147$ كما حُسِبَت سابقًا باستخدام العوامل الأولية في التحليل. أي أننا أوجدنا d دون تحليل العددَان 2058 و3675. نلاحظ أن أكبر العددين في كل زوج يقل، وتكون الحدود العليا هي:

$$3675, 2058, 1617, 1176, 735, 441, 294, 147.$$

ربما تكون خوارزمية إقليدس هذه هي أقدم مثال حقيقي للخوارزميات وهي طريقة ميكانيكية للبت في مسألة ما. في عصر الكمبيوتر، أعتقد أن هذا موضوع جذاب للمدارس الثانوية لإعادة اكتشافه. لماذا تنجح؟

ربما أول سؤال يسأله علماء الحاسبات عن الخوارزميات هو «هل تتوقف الطريقة؟» الطريقة تأخذك إلى حلقة تدور حولها لعدد من المرات ومن المؤكد أننا لا نريد أن نقع في شرك الحلقة إلى الأبد. ومع ذلك فيجب أن تتوقف هذه الحلقة، نبدأ مع عددين موجبين وفي كل مرة نذهب للخطوة الثانية وهنا أكبر العددين مؤكد سيتناقص. هذا لا يمكن أن يستمر للأبد؛ لأن أكبر العددين سوف يتناقص إلى الصفر. هذا يحدث إذا — وفقط إذا — كان العددان في خطوة ما متساويين (راجع المثال)، وعندها تتوقف الخوارزمية، ومن ثم فإن الخوارزمية لا تنتج عددًا، لكن لماذا هو بالضرورة أعلى معامل مشترك d؟

السبب أن الطريقة تحفظ جميع العوامل المشتركة للرقمين في كل خطوة، كما سنشرح، نفترض أننا بدأنا بالعددين a وb، وأن a هو أكبر العددين. نقوم بالخطوة الأولى $a - b = r$ مثلًا ونستمر مع الزوج b وr بدلًا من a, b، فإذا كانت c أي عامل مشترك بين a, b

فإن: $a = cx, b = cy$ فيكون: $r = cx - cy = c(x - y)$، أي أن c أحد عوامل r أيضًا. بنفس الطريقة يمكنك التحقق باستخدام المعادلة $a = b + r$ أن القاسم المشترك بين b وr هو أيضًا أحد عوامل a. من ذلك نستنتج أن مجموعة العوامل المشتركة للعددين a وb هي نفسها كمجموعة العوامل المشتركة للعددين b وr. وخصوصا أكبر عنصر في هذه المجموعة للعوامل المشتركة يرمز له h.c.f. للعددين a وb يساوى أكبر قاسم مشترك للعددين b وr. كل مرة تنفذ فيها الحلقة لزوج من الأعداد يتغير زوج الأعداد، لكن القاسم المشترك الأعظم لها يظل ثابتًا كما هو. في النهاية نرى أن العددين المتساويين القاسم المشترك الأعظم بينهما هو العدد ذاته.

يوجد شيئان مهمان جدًا حول خوارزمية إقليدس، أحدهما تطبيقي والآخر نظري. لنفرض أننا نستخدم الخوارزمية على العددين (92, 8). خطوة تلو الأخرى نجد أننا نطرح 8 من 92 أكثر من مرة:

$$(92, 8) \longrightarrow (84, 8) \longrightarrow (76, 8) \longrightarrow \cdots$$

عدد مرات طرح 8 من 92 يصل إلى 11 مرة، يمكن إسراع العملية بقسمة 92 على 8 وطرح المضاعفات في خطوة واحدة:

$$92 = 11 \times 8 + 4.$$

ومعنى ذلك أننا نكرر دخول الحلقة 11 مرة قبل أن تصبح 8 هو أكبر العددين وفي هذه الحالة يكون الباقي 4. لكن $4 \times 2 = 8$ والباقي صفر. بمعنى باستخدام الحلقة مرتين أكثر يصبح الباقي صفر. لكن في الخطوة قبل الأخيرة لدينا (4, 4) ومن ثم يكون 4 هو القاسم المشترك الأعظم بين 92، 8. أي أن:

$$(92, 8) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (8, 4) \longrightarrow (4, 4) : d = 4.$$

عمليا الخوارزمية تعمل بالشكل الآتي (في كل خطوة نضع خطًا تحت العددين المستخدمين) المثال:

أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين $\underline{516}$، $\underline{432}$:

$$516 = 1 \times \underline{432} + \underline{84}$$

$$432 = 5 \times \underline{84} + \underline{12}$$

$$84 = 7 \times \underline{12}.$$

ولأن الباقي هو الصفر فإن القاسم المشترك الأعظم المطلوب هو 12.

النقطة النظرية هي أننا نستخدم هذه المعادلات للتعبير عن القاسم المشترك الأعظم (في هذه الحالة 12) باستخدام الزوج الأصلي من الأعداد كما يلي:

نبدأ باستخدام المعادلة قبل الأخيرة ونكتب

$$12 = 432 - 5 \times 84. \qquad (1)$$

يمكننا الآن استخدام المعادلة الأولى للتعبير عن الباقي المتوسط 84 بدلالة العددين 516، 432: أي

$$84 = 516 - 432. \qquad (2)$$

بتعويض (2) في (1) نحصل على:

$$12 = 432 - 5(516 - 432) = 432 - 5 \times 516 + 5 \times 432;$$

أي أن:

$$12 = 6 \times 432 - 5 \times 516. \qquad (3)$$

ونلاحظ هنا أن:

أولًا: مع أننا لا نتعامل إلا مع أعداد موجبة فإننا اضطررنا لضرب عددين سالبين أي $-5 \times -432 = 5 \times 432$. إذا أزعجك هذا فثق بأننا سوف نعود لبرهان هذا الموضوع في الفصل القادم. في هذه الخطوة لا

نحتاج إلا لملاحظة ما حدث وأن المعادلة النهائية (3) صحيحة ويمكنك اختبارها بنفسك.

ثانيًا: بالعمل على معادلات خوارزمية إقليدس في الاتجاه المعاكس ترى أنه يمكن دائمًا إيجاد عددين صحيحين x وy بحيث إن $d = ax + by$، مع أنهما قد يكونان غير موجبين كما رأينا في المثال السابق $a = 516, b = 432$ فحصلنا على $d = 12, x = -5, y = 6$. بفرض أن العددين a وb أوليان أحدهما للآخر coprime أي أن القاسم المشترك الأعظم بينهما هو الواحد (مثلًا العددان 40، 21 أوليان أحدهما للآخر ولكن العددين 24 و21 غير أوليين أحدهما للآخر لأن القاسم المشترك الأعظم بينهما هو 3). ومن ثم توجد أعداد صحيحة x وy تحقق المعادلة $ax + by = 1$.

إن قدرتنا على تمثيل العدد 1 بهذه الطريقة تتيح لنا أن نستأنف شرح تمهيدية إقليدس وهي: «إذا كان حاصل ضرب عددين a وb يقبل القسمة على العدد الأولي p فإن أحد العددين على الأقل يقبل القسمة على p».

لنفرض أن p العدد الأولي وأنه قاسم لحاصل الضرب ab أي أن $ab = rp$. لنفرض أن p ليست قاسمًا للعدد a. (إذا كانت، نكون قد أثبتنا ما نريد.) إذًا، لأن p عدد أولي فإن القاسم المشترك الأعظم للزوج من الأعداد a، p يجب أن يكون هو الواحد. وباستخدام خوارزمية إقليدس يوجد عددان x وy يحققان: $ax + py = 1$ الآن:

$$b = b \times 1 = b(ax + py) = bax + bpy.$$

لأن $ba = pr$ فالمعادلة السابقة تصبح:

$$b = prx + pby = p(rx + by).$$

وهذه توضح أن p يقسم العدد b وهو بالضبط ما نريد إثباته. أي أن خوارزمية إقليدس قد أثبتت.

تعليق أخير: قوة النتيجة الرياضية ليست دائمًا واضحة. خوارزمية إقليدس تسمح لنا بكتابة القاسم المشترك الأعظم d (h.c.f.) في الصورة

$ax + by$. من النظرة الأولى، قد يبدو أنه ليس هناك سبب لذلك. ولكن الحقيقة: «أنه كان من الممكن كتابه 1 في صورة $ax + by$» هي الحجة المهمة التي سمحت لنا بإثبات تمهيدية إقليدس.

بعض الفضول قديم وحديث

لأن هذا الكتاب الرياضيات للفضوليين فسوف أعرض لبعض من المسائل الشهيرة التي لم تحل أو على الأقل صعبة الحل عن الأعداد.

تخمين جولدباخ:

في القرن الثامن عشر طرح جولدباخ التخمين التالي «كل عدد زوجي أكبر من 2 هو مجموع عددين أوليين.» ويبدو أن هذا صحيح وعادة توجد طرق كثير لتوضحيه، فمثلًا: $5 + 13 = 7 + 11 = 18$، ويمكن أن تجرب بنفسك بعض الأعداد. هناك حالة أبسط من هذا التخمين أمكن إثباتها لكن التخمين الأصلي لا يزال بدون برهان. ليس لأنني متخصص في الرياضيات وفي نظرية الأعداد خاصة، فإنني أشعر بأنني لست مؤهلًا للحكم على أن تخمين جولدباخ يعتبر مسألة خطيرة. لقد سمعت أنه رفض ملاحظة تقول: «الأعداد الأولية لم تعن أبدًا أنها للإضافة» ربما لا، لكن يستطيع الفرد اكتشاف عنصر الإحباط في مثل هذا النوع من الرد.

نظرية فرمات الأخيرة:

أحد المسائل التي أخذت بجدية شديدة كانت نظرية فرمات الأخيرة، وهذا يتطلب مقدمة صغيرة:

من الممكن أن يكون لديك مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه أعداد صحيحة — مثلًا حتى قدماء المصريين قدروا أن $(3,4,5)$ مثلث قائم الزاوية — هذا طبعًا سيأتى من نظرية فيثاغورث التي أثبتناها في الفصل الثالث، أن $3^2 + 4^2 = 5^2$. يمكننا توليد أكثر من هذا الثلاثي الفيثاغورثي بضرب الأعداد السابقة في 2 أو أكثر من العوامل. المثلث $(6, 8, 10)$ يشابه

المثلث $(3,4,5)$ له نفس الشكل لكنه ضعف المساحة. أي أن الاختلاف بين المثلثين ليس إلا في القياس. لكن يوجد فرق حقيقي بين ثلاثيات فيثاغورث مثل $(5,12,13)$ و$(8,15,17)$. نسأل سؤالًا: هل يمكن وصف كل ثلاثيات فيثاغورث (a,b,c) حيث a,b,c ليس بينها عامل مشترك غير الواحد؟ الإجابة نعم وإليك التفاصيل:

الوصفة هي: خذ أي عددين أوليين بالنسبة إلى بعضهما m وn حيث $m > n$ ويكون أحدهما عددًا زوجيًّا. ضع $a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$ فإن الثلاثي (a,b,c) هو ثلاثي فيثاغورثي حيث الأعداد a,b,c ليس بينها عامل مشترك. هذا من السهل إثباته. إن كنت تعلمت بعض الجبر فيمكنك التأكد من أن: $a^2 + b^2 = c^2$. الجزء الصعب هو إثبات أن العكس أيضًا صحيح: أي لأي ثلاثي فيثاغورثي من الأعداد (a,b,c) دون أن يكون بينها عامل مشترك يوجد عددان أوليان بالنسبة إلى بعضهما m وn وأحدهما عدد زوجي حيث a,b,c تعطى بالصيغة السابقة. إلا أن كل ذلك قد تم إثباته من زمن طويل ولن نكرر التفاصيل هنا مع أنها ليست صعبة جدًّا.

نحن نبحث الآن عن قوى أكبر من 2. ما أكده فرمات في أوائل القرن السابع عشر هو أنه من المستحيل إيجاد عددين مكعبين مجموعهما عدد مكعب آخر. من المستحيل إيجاد عددين مرفوعين للقوة الرابعة ويكون مجموعهما عددًا مرفوعًا للقوة الرابعة. وهكذا، أي أن لأي $n \geq 3$ لا توجد أعداد صحيحة كحل للمعادلة:

$$x^n + y^n = z^n.$$

فرمات ادعى أن لديه برهانًا رائعًا لهذا التخمين الذي ظهر كملاحظة على هامش واحدة من مخطوطاته. وأضاف أن الهامش صغير جدًّا لاحتواء الإثبات، وبهذا لم يحدث أبدًا أنه كتب البرهان. فرمات قدم عددًا من الملاحظات المماثلة على الهوامش كلها تم برهانها إلا هذا التخمين ولهذا كان هذا العنوان: «نظرية فرمات الأخيرة».

للوهلة الأولى لا تبدو هذه المسائل ذات أهمية خاصة، لكن سيكون هذا حكمًا سطحيًّا خاطئًا تمامًا لأن الكثير من الرياضيات الرائعة قد نتجت من دراسة نظرية فرمات الأخيرة أكثر من أي سؤال آخر. ولحسن الحظ فإن المسألة قد حُلت تمامًا كما تنبأ فرمات بواسطة اندرو ويلز Andrew wiles في التسعينيات، من خلال إثبات تخمين عميق جدًّا عمّا يسمى المنحنيات الناقصة والصيغ القياسية التي ليست لها صلة واضحة مع فرمات. البرهان الذي لاقى ترحيبا هائلًا على أنه برهان القرن وغير عادي العمق ولا يمكن إلا لعدد قليل — يعد على الأصابع — من الناس الادعاء بأنهم فهموا البرهان تمامًا. نسخة مبكرة من البرهان أعتقد أنها كاملة تبين بها خطأ أساسي جرى حله بفخر بواسطة ويلز. عمل ويلز مؤكد يمثل جهدًا ملهمًا للعبقرية البشرية حتى لو كان الإعجاب به من بعيد.

من العار أن أندور ويلز لن يُشَرَّف على هذا الإنجاز بالحصول على جائزة نوبل؛ فلا توجد جائزة نوبل للرياضيات. وماذا عن برهان فرمات الأصلي؟ برهان ويلز يعتمد على عدد هائل من إنجازات الرياضيين في القرن التاسع عشر والقرن العشرين ومن ثم هو خارج أي شيء يمكن لفرمات ابتكاره أثناء حياته. مهما كان تفكير بييردي فرمات عندما كتب على الهامش فإن رسالته تبقى غامضة وربما للأبد.

صيغ الأعداد الأولية:

إنني لا أنصح القارئ بالانغماس في التنقيب لإيجاد أحد هذه الأعداد. مع أنه من الطبيعي لأي شخص أن يبحث عن نمط بين الأعداد الأولية.

بصيغة الأعداد الأولية نعني نوعًا من الدوال $f(n)$ بحيث إن لأي عدد طبيعي n، $f(n)$ هو العدد الأولي الذي ترتيبه n، هذا القانون يجب أن يبدأ بالقيم:

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, \ldots, f(10) = 29, \ldots$$

بمعنى صارم (وغير مجدٍ) نُعرف ما هي $f(n)$: هي قيمة العدد الأولي ذي الرتبة النونية. المزعج في الأمر عامة أنه ليس لدينا طريقة سهلة لحساب

$f(n)$. يمكننا أن نبدأ مع هدف أكثر تواضعًا من الإصرار أن (لكل n) قيمة الدالة $f(n)$ هي عدد أولي أكبر من العدد الأولي $f(n-1)$. بكلمات أخرى سوف نصنع صيغة تنتج متتابعة متزايدة من الأعداد الأولية، حتى إذا كانت بعض الأعداد الأولية مفقودة.

مؤكد صيغة مثل $f(n) = 6n + 1$ لا تصلح. (أدل فشل لها عند $n = 4$). نأخذ أي صيغة مثل $f(n) = an + b$ حيث a, b أعداد صحيحة. من الميثوس منه أخذ $a = \pm 1$ لأن هذه الصيغة تعطي كل عدد ابتداء من b فصاعدًا حيث $a = 1$، وكل عدد ابتداء من b نزولًا إذا كانت $a = -1$، ولهذا لنفرض أن $a \neq \pm 1$. ولهذا فإن $f(b) = ab + b$ أي $f(b) = b(a+1)$ ومن ثم فهو عدد مركب إلا إذا كانت $b = \pm 1$ ما لم يكن b عددًا أوليًّا.

نفرض أن $b = 1$. فإننا نحصل على عدد مركب بوضع $n = a+2$ لأن:

$$f(a+2) = a(a+2) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2,$$

وهو عدد مربع أي عدد مركب. لحظيًّا بوضع $a = 6$ نحصل على: $f(8) = 6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2$ إذا حاولنا $b = -1$ فنجد صعوبة بوضع $n = a$: $f(a) = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$. فمثلًا إذا كانت $a = 6$ نحصل على: $f(6) = 6 \times 6 - 1 = 35 = 7 \times 5$. يمكنك محاولة إيجاد صيغة تحتوي على قوى أعلى لـ n مثل $f(n) = n^2 + n + 41$، لكن من الممكن دائمًا بخطوات مثل السالفة أن نجد عدد n يجعل $f(n)$ يمكن تحليلها. هذا المثال للدالة التربيعية يرجع إلى أويلر ومن الملاحظ أنه ينتج الأعداد الأولية الثمانين المتتالية: $n = -40, -39, \ldots, 39$ فمثلًا بأخذ $n = 7$ نحصل على العدد الأولي 97. يمكنك اختبار ذلك لقيم n مختلفة. $n = 40$ هذه الصيغة تفشل لأن: $f(40) = 1681 = 41 \times 41$. أي أن العدد الناتج ليس عددًا أوليًّا لكنه عدد مركب.

$$\begin{aligned} f(40) &= 40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 \\ &= 40 \times 41 + 41 = (40+1)41 = 41^2. \end{aligned}$$

لنلق نظرة على بعض الأسئلة الأخرى لموضوع الأعداد الأولية، يمكن الحصول على سلسلة طويلة من الأعداد المتتالية ولا تحتوي على أي عدد أولي. أحد البراهين يحتوي على استخدام دالة المضروب (factorial). العدد $n!$ (ويقرأ مضروب n) هو حاصل الضرب:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

مع أنه يمكن لنا ترك الضرب $\times 1$ لأنه لا يؤثر.

المضروب ينمو بسرعة كبيرة فمثلًا، $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$، وبسرعة نصل إلى عديد من البليون. تظهر هذه الدالة باستمرار في مسائل تحتوي على العد في الاحتمالات مثل إيجاد فرص الفوز في اليانصيب القومي (حوالي 1 في 14,000,000 — انظر الفصل السادس). نستخدم حقيقة أن $n!$ له عوامل عديدة بما فيها كل الأعداد $2, 3, \ldots, n$ لتكوين متتابعة من n من الأعداد المركبة المتتالية لأي عدد n، لنأخذ الأعداد التالية:

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + n + 1.$$

توجد أعداد متتالية عددها n في هذا التعبير، الأول يقبل القسمة على 2، لأن الحدين $2, (n+1)!$ كل منهما عدد زوجي، الثاني يقبل القسمة على 3 لأن 3 أحد عوامل $(n+1)!$ ولا شك أنها عامل في 3 وهكذا. العدد الأخير أحد عوامله هو $n + 1$. ولاسيما أن أيًّا من هذه الأعداد ليس عددًا أوليًّا، ومن ثم فإن المتتابعة تمثل قائمة تحتوي n من الأعداد المركبة المتتالية.

هذه المتتابعة تستخدم أيضًا لإثبات أنه لا توجد متتابعة بالصيغة $an + b$ تتكون فقط من أعداد أولية لأن الفرق المشترك بين أي حدين متتاليين في هذه المتتابعة دائمًا العدد a، لكننا أوضحنا أن الفجوة بين عددين أوليين متعاقبين يمكن أن تكون كبيرة جدًّا كما نرغب.

يُعرف الكثير عمومًا حول وتيرة ظهور الأعداد الأولية. يوجد على الأقل عدد أولي واحد p بحيث يكون $n < p < 2n$ لأي عدد $n \geq 2$، والرمز $\frac{n}{p(n)}$ (حيث $p(n)$ ترمز لعدد الأعداد الأولية أقل من أو تساوي n) هي

نسبة تؤول إلى $\log_e n$ عندما تكبر n بلا حد، وتسمى اللوغاريتم الطبيعي للعدد n.

توجد صيغ للأعداد الأولية: إحداها هو إعادة صياغة المسألة التي تؤدي إلى صيغة، ومع أنها تبدو رائعة فيمكن استخدامها فقط إذا علمنا ما هي جميع الأعداد الأولية في المكان الأول، صيغة أخرى أصلية، لكن كم الحسابات المطلوب تخيلي، أي أنها لا تقوم بالعمل أيضًا.

وحيث إنه لا توجد صيغة نافعة للأعداد الأولية، فإنه يوجد عدد أولي أكبر معروف، البطل في أي مرحلة هو عادة العدد الأولي لميرسين، أي العدد الأولي على الصورة $2^p - 1$ حيث p عدد أولي أيضًا. ومع أنه من المعروف أن عدد ميرسين ليس دائمًا عددًا أوليًا {$2^{67} - 1$ يقبل القسمة على 193، 707، 221 مثلًا} فيمكن إثبات أن أي قاسم لعدد ميرسين يكون على الصورة $2kp + 1$ لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k. هذا يجعلهم مرشحين للاستخدام كأعداد أولية بالمعنى الدقيق. لنختبر عدد ميرسين $2^{11} - 1 = 2047$ من كونه أوليًا أم لا.

أولًا: سأشير إلى أن أي عدد مركب n له عامل لن يكون أكثر من $\sqrt{n}$ لأن العوامل تظهر في أزواج ومن المستحيل أن يزيد أي منها على $\sqrt{n}$ فيكون حاصل ضربهما أكبر من n. فمثلًا $7 \times 11 = 77$ حيث 7 عامل في 77 أقل من $\sqrt{77}$ الذي يقع بين 8، 9. لأن أي عامل هو نفسه عامل أولي، فبالتالي لأجل إثبات أن عدد n هو عدد أولي، يكفي أن يتحقق أنه ليس له عوامل أولية أقل من أو تساوي $\sqrt{n}$. لكي نحقق ما إذا كان $2^{11} - 1 = 2047$ عددًا أوليًا أم لا، نحتاج فقط لاختبار قابلية القسمة على أعداد أولية بالصيغة $22k + 1$ أقل من 46 حيث $46^2 > 2047$. يوجد فقط عدد أولي واحد بوضع $k = 1$، أي العدد الأولي 23 هو العامل الأولي الممكن. فعلًا إذا قسمنا على 23 نحصل على $23 \times 89 = 2047$. في الحقيقة العدد 2047 هو أول عدد مركب من أعداد ميرسين (يلاحظ أن 89 أيضًا على الصيغة $22k + 1$).

حتى العدد الكبير نسبيًا لميرسين $M = 2^{19} - 1 = 524,287$ يمكن إثبات أنه عدد أولي بالحسابات اليدوية. في هذه المرة نبدأ ملاحظة أن

$M > 725^2$ ومن ثم الأعداد الأولية بالصيغة $38k + 1$ يجب ألا تزيد عن 724 وتحتاج للاختيار، فقط قيم $k = 5, 6, 11, 12, 15, 17$ تُعطى هذه الأعداد الأولية أي أننا نستخدم القسمة ست مرات.

ليست جميع المسائل البسيطة بدون حل مسائل قديمة؛ فقد لوحظ حديثًا أن بالبدء بأي عدد طبيعي n فالطريقة الآتية تبدو أنها تنتهي دائمًا بالعدد واحد، إذا كانت n عددًا زوجيًا أقسم على 2، إذا كانت n عددًا فرديًا اضرب في 3 وأضف واحدًا، مثلًا إذا بدأنا بالعدد 7 وتتبعنا القاعدة السابقة نحصل على المتتابعة التالية:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40$$
$$\to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

بلا شك جرى اختبار هذا التخمين لكل قيم n حتى بعض الأعداد الكبيرة جدًا، لكن حتى الآن لم يحصل أحد على سبب حدوث هذا في كل مرة.

مثلث باسكال والمجموعات الجزئية للعد

نوع أساسي من الأعداد يطلق عليه اسم: «معامل ذات الحدين». سبب هذه التسمية سوف يتضح في الفصل التالي. في الوقت الحاضر سوف نستخدم عدد ذات الحدين $C(n, r)$ لعدد المجموعات المختلفة المكونة من r من الأشياء المختارة من مجموعة n من الأشياء. هذه الأعداد تحولت لتصبح طيعة للاستخدام للتعبير عن أشياء بدونها تصبح أسئلة غير مناسبة. فمثلًا حاصل ضرب أربعة أعداد صحيحة متتالية هو دائمًا مضاعف لـ $24 = 4!$ أي أن:

$$17 \times 18 \times 19 \times 20 = 24 \times 4845.$$

أيضًا حاصل ضرب خمسة أعداد متتالية بالمثل هو مضاعف للعدد $120 = 5!$ وعامة $r!$ دائمًا عامل لحاصل ضرب أي عدد r من الأعداد الصحيحة المتتالية. صحة هذا تكون واضحة إذا علمنا قليلًا عن تكوين أعداد ذات الحدين.

مثلث باسكال

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
•
•
•

شكل ١

سوف أشرح جميع أعداد ذات الحدين معروضة في صفوف تسمى مثلث باسكال (الشكل ١) سوف نرى أن الصف النوني يقرأ من اليسار إلى اليمين يتكون من الأعداد: $C(n,0), C(n,1), \ldots, C(n,r), \ldots, C(n,n)$ سوف أشرح كيفية توليد صفوف المثلث بعد قليل، مع أنك قد ترغب في اكتشاف النمط بنفسك.

يمكننا بسهولة اختبار بعض الصفوف الأولى للمثلث بالفحص والتحسس. فمثلًا العدد 6 في منتصف الصف الرابع مثلًا $C(4,2) = 6$ وهذا صحيح لأنه يوجد ست طرق لاختيار زوج من الناس من مجموعة مكونة من أربعة {A, B, C, D} الأزواج الستة بدون ترتيب هي: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

التماثل الواضح في مثلث باسكال حيث كل صف يمكن قراءته من الخلف تمامًا مثل الأمام بدلالة أعداد ذات الحدين نجد أن $C(n,r) = C(n,n-r)$. فمثلًا العدد 56 الذي ظهر مرتين في الصف الأخير يوضح أن $C(8,3) = C(8,5)$. هذا ليس مفاجئًا إذا فكرت فيه:

عندما تختار ثلاثة أشخاص من مجموعة تحتوي على ثمانية أفراد هو نفسه اختيار خمسة لتركهم. ومن ثم فإن عدد طرق اختيار ثلاثة من ثمانية هو نفسه عدد الطرق لاختيار خمسة من ثمانية.

ما هي قاعدة كتابة الصف التالي في مثلث باسكال؟ كل عدد في الصف (بعيدًا عن أعداد البداية والنهاية التي هي دائمًا الواحد) يمكن الحصول عليه بجمع العددين في الصف أعلى منه مباشرة. فمثلًا العدد 28 في الصف الثامن تأتي من جمع 7، 21. ماذا يوضح لك ذلك عن أعداد ذات الحدين؟ إنه يوضح أن $C(8,3) = C(7,2) + C(7,3)$ وعمومًا:

$$C(n,r) = C(n-1,r-1) + C(n-1,r).$$

إذا استطعنا تفسير لماذا هذا هو الحال، يمكننا استنتاج أن مثلث باسكال سوف يعطينا كل أعداد ذات الحدين. لنبحث حالة $C(8,3)$، بالرغم مما سأقول فإنه ينطبق جيدًا في الحالة العامة. لتبسيط الأمر لتكن المجموعة المكونة من ثمانية عناصر هي $A = \{1,2,3,\ldots,8\}$، المجموعات الثلاثية التي يمكن اختيارها من A هي من نوعين مختلفين أي المجموعات التي تحتوي 8 والمجموعات التي لا تحتويها. لاختيار مجموعة من النوع الأول نأخذ العدد 8 ثم نأخذ عددين من 1 إلى 7: من التعريف توجد $C(7,2)$ من الطرق لعمل ذلك. من الناحية الأخرى إذا لم نأخذ 8 لتكون واحدة من اختياراتنا يمكن اختيار الثلاثة الأعداد من السبعة الأولى، التي يمكن اختيارها بعدد $C(7,3)$ من الطرق، فإذا جمعنا النتيجتين معًا فسنحصل على $C(8,3) = C(7,2) + C(7,3)$.

هذه الحجة تنطبق أيضًا في الحالة العامة، مجرد التعويض عن 8 بالعدد n، والتعويض عن 3 بالعدد r في المعادلة السابقة.

مثلث باسكال يمدنا بطريقة لحساب أي من أعداد ذات الحدين $C(n,r)$، مع أننا يجب أن نجد أولًا الأعداد في الصف السابق. سيكون من الأفضل أن نجد صيغه للعدد $C(n,r)$، أي أن نجد تعبيرًا للعدد بدلالة n

و r فقط. الهجوم المباشر على المسائل يسفر عن المكافأة، مرة أخرى دعونا ننظر إلى $C(8,3)$.

عدد طرق اختيار ثلاثة أشياء بالترتيب من ثمانية هو $8 \times 7 \times 6$ بحيث إن نفس العدد لا يمكن اختياره مرتين أي أن عدد الطرق الممكنة للعدد التالي ينقص واحدًا بعد كل اختيار. كل مجموعة من ثلاثة أشياء تعطي $3 \times 2 \times 1$ من الترتيبات أي أن عدد المجموعات المختلفة المكونة من ثلاثة هي:

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56.$$

استخدام نفس هذه الأسباب في الحالة العامة يسمح لنا بكتابه $C(n,r)$ يساوي حاصل ضرب r من الأعداد الصحيحة المتتالية من n تناقصيًّا مقسومًا على $r!$. بكلمات أخرى:

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}. \qquad (4)$$

يلاحظ أن آخر حد في البسط هو $n-r+1$ وليس $n-r$ لأن أول حد هو $n = n-0$ وليس $n-1$، فمثلًا عند $n = 8$، $r = 3$ فإن الحد الأخير $8-3+1 = 6$ كما رأينا سابقًا.

لأننا أحرار في اختيار n أي عدد أكبر أو يساوي r. البسط في التعبير (4) يمكن جعله كحاصل ضرب أي r من الأعداد الموجبة المتتالية. لأن $C(n,r)$ بلا شك عدد صحيح وليس كسرًا فإن حاصل ضرب أي r من الأعداد الصحيحة المتتالية يقبل القسمة على $r!$، فمثلًا حاصل الضرب: $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$ هو مضاعف للعدد $5! = 120$ بوضع $n = 15$، $r = 5$ في (4) نحصل على:

$$C(15,5) = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5!}.$$

تعبير آخر مدمج لـ (4) يمكن الحصول عليه بملاحظة أن البسط يساوي $\frac{n!}{(n-r)!}$ مرة أخرى بأخذ المثال $n = 8, r = 3$ نقول إن:

$$8 \times 7 \times 6 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!},$$

ونحصل عليه فورًا من خلال الحذف. وهذا يعطي التعبير القياسي لـ $C(n,r)$:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{5}$$

هذا الشكل من أعداد ذات الحدين أيضًا يوضح أن: $C(n,r) = C(n, n-r)$.
عندما نبدل r بالعدد $n - r$ في الطرف الأيسر من (5) ونحصل على نفس التعبير لأن: $n - (n - r) = n - n + r = r$.

الفصل الخامس

الجبر

لقد قيل لبعض القبائل الأثيوبية إن عمليات الضرب المسموح بها لهم هي عمليات التضعيف والتنصيف والأكثر من ذلك أنه ليس لديهم وسيلة للتعامل مع الكسور من أي نوع. ومع ذلك فلم توجد لديهم أي مشكلة لضرب أي عددين معًا ولا إجراءات أساسيات التجارة. فمثلًا إذا اشترى أحدهم عدد 31 من الأغنام من آخر بسعر 25 جنيهًا استرليتيًّا للواحد، فالطريقة لإيجاد التكلفة الإجمالية هي كما يأتي:

نشكل عمودين على رأسهم الأعداد 25 و31 على الترتيب، ضاعف الرقم الموجود على اليمين ونصِّف الرقم الموجود على اليسار مع إهمال أي باقي، $\frac{1}{2}$، ناتج من تنصيف العدد الفردي. مواصلة هذا العمل حتى نحصل على الواحد من الرقم الأيسر أي:

25	31
12	62
6	124
3	248
1	496

احذف السطور التي تحوي أعدادًا زوجية في العمود الأيسر أي الصفوف التي تحوي 12، 6. ثم نجمع الأعداد الباقية في العمود الأيمن أي 496 + 248 + 31 = 775 وهي الإجابة الصحيحة.

إذا كان هذا الأسلوب الأفريقي للضرب يبدو غامضًا لنا، بلا شك فإن أسلوبنا في الضرب سيبدو كذلك لهم. هل يمكنك شرح طريقتهم؟ هل يمكن توضيح طريقتك؟ في الحقيقة الطريقتان يتحدان على نفس الفكرة، وهو نفس ما ميز الجبر، ويعرف باسم: «قانون التوزيع» وهو الموضوع الرئيسي في هذا الفصل. وسوف نعود لمشكلة التجار الأثيوبيين بعد قليل.

على أية حال أود البدء بكلمة عن وضع الأقواس. عندما نكتب $7 + 4 + 2$ فلا نشعر بحاجة للأقواس لأن الطريقتين البديلتين في حساب المجموع يؤديان إلى نفس الإجابة:

$$(2 + 4) + 7 = 6 + 7 = 13; \qquad 2 + (4 + 7) = 2 + 11 = 13.$$

مما سبق يتضح أن عملية الجمع دامجة، وينطبق الشيء نفسه على عملية الضرب، أي أن لأي ثلاثة أعداد a, b, c فإن $(ab)c = a(bc)$. عند جمع هاتين العمليتين تكون الأقواس لها دور توضيحي:

$$2 + (4 \times 7) = 2 + 28 = 30; \qquad (2 + 4) \times 7 = 6 \times 7 = 42.$$

ماذا يعني $7 \times 4 + 2$؟ هذا التعبير سيكون في الحقيقة غامضًا أصلًا إذا لم يوجد عُرف (بفعل الإنسان) أن الضرب يسبق الجمع بمعنى أن $2 + 4 \times 7$ يعني ضمنيًّا أنه على الصورة $(4 \times 7) + 2$. فإذا كان المطلوب الجمع أولًا، فللحصول على ذلك نستخدم الأقواس $7 \times (4 + 2)$.

كل منا لديه بعض الخبرة في حيل الجبر أو الحساب من أيام المدرسة: يجب أن تحذر التعبيرات التي تحتوي علامة الطرح والأقواس، والسبب الرئيسي في ذلك أن عمليات الطرح ليست إدماجية. إذا استخدمنا عمليتي طرح متتاليتين فإن الأقواس تكون مهمة:

$$9 - (4 - 2) = 9 - 2 = 7, \qquad (9 - 4) - 2 = 5 - 2 = 3.$$

ومرة أخرى فإن العُرف هو $9 - 4 - 2$ بدون أقواس يعني ضمنيًّا أن $(9 - 4) - 2$، أي أن الكميات تطرح بترتيب حدوثها. فرص خطأ المعالجة

كبير ولهذا السبب كثيرًا ما نرى أن أول زوج من الأقواس مكتوب بوضوح لمجرد أن نكون في الجانب الآمن. نفس الشيء يستخدم لعمليات القسمة: لأن العملية ليست إدماجية ولهذا فإن الأقواس ليست زيادة اختيارية.

$$(32 \div 8) \div 2 = 4 \div 2 = 2, \qquad 32 \div (8 \div 2) = 32 \div 4 = 8.$$

مرة أخرى، إذا ما كتبنا $32 \div 8 \div 2$ فإننا نعني بذلك $(32 \div 8) \div 2$، ولكن للسبب نفسه كما في السابق، فإن وضع الأقواس لا يكون إلا للتوضيح، لأن عملية القسمة ليست إدماجية، فمن الأفضل تحاشي كتابة الكسور من طابقين فهي تبدو قبيحة بدون أقواس والمعنى يكون غامضًا:

$$\frac{\frac{32}{8}}{2} = 2; \qquad \frac{32}{\frac{8}{2}} = 8.$$

قانون التوزيع هو الأكثر خصوصية والأقل وضوحًا بين جميع قوانين الجبر، وتأتي خصوصيته من حقيقة أنه القانون الوحيد الذي يربط العمليتين الأساسيتين في الحساب وهما الجمع والضرب: هو القانون الذي يدلنا على كيفية ضرب الأقواس:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

فمثلًا $4(2 + 3) = 4 \times 2 + 4 \times 3$ وهي بالتأكيد صحيحة حيث: $4(2 + 3) = 4 \times 5 = 20 = 8 + 12$ لحظة تفكير على هذا المثال يوضح لك ما يحدث على أحد جانبي هذا المجموع لدينا:

$$4(2 + 3) = (2 + 3) + (2 + 3) + (2 + 3) + (2 + 3),$$

والجانب الآخر:

$$(2 + 2 + 2 + 2) + (3 + 3 + 3 + 3).$$

الطرفان كمجموعين يحتويان على نفس الأعداد لكن في ترتيب مختلف ومن ثم لا يوجد فرق (وهذا هو قانون التبادل للجمع: $a + b = b + a$). الحالة العامة تنطبق لنفس الأسباب حيث:

$$\underbrace{(b+c)+(b+c)+\cdots+(b+c)}_{\text{عدد } a \text{ من المرات}} = \underbrace{(b+b+\cdots+b)}_{\text{عدد } a \text{ من المرات}} + \underbrace{(c+c+\cdots+c)}_{\text{عدد } a \text{ من المرات}}.$$

المهارة في قانون التوزيع تأتي من استخدامه في الاتجاه المعاكس للتعبير عن المجموع كحاصل ضرب باستخراج عامل مشترك. وبدلا من استخدام الكثير من الأقواس فإن هناك عملية ميكانيكية تمامًا موضحة أدناه، التحليل يحوي النظر في التعبير واكتشاف عامل مشترك. هذا يتطلب حكم الطالب فهو الذي يقرر هل هذا التحليل مناسب وسيساعد في تبسيط التعبير الجبري المُعطى. وهذا يتطلب خبرة كبيرة مناسبة، لكنها جزء لابد منه في علمية التعليم.

الطلاب الجادون في أساسيات الرياضيات بحاجة للتعامل بسهولة مع الجبر ومعرفة كيفية استخدام قانون التوزيع في كل من الاتجاهين.

مثال من طريقة التحليل في صفحة (١٠٥) حيث اختبرنا أن: $41^2 = 40^2 + 40 + 41$ هناك استخدم قانون التوزيع مرتين. في الحقيقة فإن قانون التوزيع يستخدم عندما نقوم بعملية ضرب عادي، غير أننا قد لا نركز على ذلك. أسلوبنا يعتمد على ثلاثة أشياء: معرفة جدول الضرب إلى 10 (أساس النظام العددي)، معرفة أنه للضرب في 10 فإننا ببساطة نضيف 0 إلى النهاية اليمنى للعدد المطلوب ضربه ثم قانون التوزيع، فمثلًا لضرب 32 في 7 (أي مضاعف 32 سبع مرات):

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 7 \\ \hline 224 \end{array}$$

في الحقيقة قمت بعمليتي ضرب صغيرتين مستخدمًا معلوماتك عن قائمة الضرب، ثم ضربت في 10 وأخيرًا أكملت المجموع بإضافة الإجابات معًا، ماذا تقول الطريقة إذا كتبناها بوضوح:

$$32 \times 7 = (30 + 2) \times 7 = 30 \times 7 + 2 \times 7.$$

لقد استخدمنا قانون التوزيع لتجزئة الضرب إلى مجموع عمليتي ضرب أبسط، ثم:

$$30 \times 7 + 2 \times 7 = 30 \times 7 + 14 = (30 \times 7 + 10) + 4.$$

وتنطوي الخطوة الأولى على معلوماتك لقاعدة الضرب مرتين ثم الخطوة التالية تسمى تحميل حيث تأخذ 10 التي ظهرت وكيفيتها إلى عمود العشرات، في خانة الوحدات أصبح هناك مقدار ثابت. ثم نستمر لأن باقي الخطوات محققة باستخدام قانون الإبدال للضرب (أي أن الأعداد تُضرب بأي ترتيب) وبمعرفة قانون الضرب في 3 وقانون التوزيع مرة أخرى، وقاعدة الضرب في 10 وأخيرًا الجمع البسيط:

$$\begin{aligned}
&= (3 \times 10 \times 7 + 10) + 4 \\
&= (3 \times 7 \times 10 + 10) + 4 \\
&= (21 \times 10 + 10) + 4 = (21 + 1) \times 10 + 4 \\
&= 22 \times 10 + 4 = 220 + 4 = 224.
\end{aligned}$$

قد تشعر بشيء من عدم الراحة مع هذا المستوى التفصيلي للتفسير، جزء من السبب في ذلك أنني أشرح شيئًا مألوفًا تمامًا — الضرب البسيط — باستخدام أفكار قد تكون غير مألوفة، قوانين الحساب. إذا أزعجك هذا فاتركها تمر مع ملاحظة نقطة هامة: كل طريقة حسابية تعتمد في تحقيقها على ملء اليد بقوانين بسيطة جدًا في الحساب أحدها قانون التوزيع. آمل مع ذلك أن تساعد قوانين الحساب في توضيح الطريقة

الأثيوبية للضرب إلا إذا كنت أثيوبيًّا فإنك ربما ستشعر بعدم الحاجة إلى الشرح.

نعود الآن إلى مشكلة الضرب الأثيوبية بكل ما فيها من مضاعفة وتنصيف مع إهمال الأنصاف وحذف الصفوف الزوجية وجمع الباقي. قد يبدو هذا محيرًا لكن عند تحليل ذلك فإنه يكون مدعومًا بقوة قانون التوزيع.

أولًا: نلقي نظرة على مثال حيث النهج الإفريقي واضح تمامًا (شفاف). الفكرة الأساسية هي حساب ab بالاستعاضة عنها بـ $\frac{a}{2} \cdot 2b$. إذا كان أحد الأعداد قوة للعدد 2 فإن الطريق يصبح واضحًا. مثلًا لحساب 16×40 فإن رجل القبيلة سيقول:

$$16 \times 40 = 8 \times 80 = 4 \times 160 = 2 \times 320 = 1 \times 640 = 640.$$

وفي هذه الحالة كل صف باستثناء الصف النهائي يبدأ بعدد زوجي فلا بد من حذفه إلا الأخير 640×1. وهذا واضح بما فيه الكفاية. نقطة الضعف في هذه الطريقة تنشأ عندما نقابل عددًا فرديًّا في العمود الأيسر، دعونا ننظر بإمعان في هذا الأمر؛ نفرض صف ab حيث a عدد فردي، ما الخطوات الفعلية التي نقوم بها في هذه الخطوة، نكتب مكان a، $c+1$ حيث $c = a - 1$ ثم نفك المقدار باستخدام قانون التوزيع:

$$ab = (c+1)b = cb + b.$$

ثم نستمر في العمل مع حاصل الضرب cb، العدد الزائد b لا يمكن إهماله، على أية حال هذا هو السبب في أن الأعداد في العمود الأيمن التي تبدأ بعدد فردي (في العمود الأيسر) لا يمكن إهمالها ولكن تكون جزءًا من المجموع النهائي. يبدو أن الأثيوبيين وكأنهم يهملون الكسور التي تنشأ في الحسابات، لكن في الحقيقة لا. لنعد للمثال في بداية هذا الفصل مستخدمين طريقتنا الحديثة لتوضيح الطريقة الأثيوبية:

$$25 \times 31 = (24 + 1) \times 31 = 24 \times 31 + 31 = 12 \times 62 + 31.$$

نرى أنه عند الانتقال من الصف الأول للثاني فإن 25 يحل محلها 24 وبخطوة التنصيف والمضاعفة ننتقل إلى الصف التالي ومع ذلك فلا نغفل 31×1 أنه يبقى في الخانة الثانية من الصف الأول في انتظار أن نجمعه بعد ذلك، نستمر في ذلك فنحصل على:

$$= 6 \times 124 + 31 = 3 \times 248 + 31 = (2 + 1) \times 248 + 31$$
$$= 2 \times 248 + 248 + 31 = 496 + 248 + 31 = 775.$$

مع أن هذا قد لا يكون الأسلوب المريح لنا، فإن الطريقة الأثيوبية صحيحة تمامًا كما هو الحال في كثير من الطرق الأخرى المستخدمة في الضرب، هذه نقطة نفسية هامة، عندما نقوم بعمليات الحساب ذهنيًا فإن كل فرد يبدو أن له أسلوبه الخاص، شريطة أن يصلوا للنتائج ولا غبار على ذلك. الناس غالبًا ما يخجلون من طريقة أدائهم للأشياء خوفًا من أن يقال إنهم يقومون بالعمل بأسلوب خاطئ ومبالغ فيه.

لقد شُجِّعْنا جميعًا على القيام بالعمليات الحسابية ذهنيًا، لكن عادة لم يخبرنا أحد عن كيفية عمل ذلك، وكثيرًا ما تركنا لأساليبنا الخاصة. الطرق القياسية لعمل الجمع مصممة لاستخدام القلم الرصاص والورقة حيث تملك ميزة كتابة الأعداد (والترحيلات مثلًا) وتخزينها دون حاجة لتذكرها عند الانتقال إلى الخطوة التالية من الحسابات. ولذلك فإن هذه الطرق غير مناسبة للحسابات الذهنية كما أنه من الصعب الاحتفاظ ببعض الأعداد في العقل أثناء التعامل مع أخرى. عندما نتكلم عن الحساب (الذهني) العقلي فيمكنك عمل أي شيء ما دام يؤدي للنتيجة، إذا حاولت كتابة طريقتك لإقناع نفسك أنها صحيحة فإنك سترى في النهاية أن طريقتك تتم بنفس قوانين الحساب كما يفعل سائر الناس.

من الحساب للجبر

الجبر يحتوي على إجراء الحسابات دون تعيين للأعداد، ويرمز لها برموز، بدلا من تعيينها. هذا يسمح لنا بوصف الطريقة العامة دفعة واحدة. من

أحد الجوانب فإن ذلك يأخذ وقتا للتعود، ولكن من الجانب الآخر، لأن قوانين الجبر يجب أن تصمم مطابقة لقوانين الحساب فإن استخدامها لا يحوى الجديد. وذلك هو السبب في أن إجادة الحساب تؤدى إلى الكفاءة في الجبر.

دعونا نقدم بعضًا من الجبر الأوَّلي ونرى ما يمكن عمله معه، باستخدام قانون التوزيع يمكن فك تعبير مثل $(x+y)^2$. للحظة لتكن a هي العدد $x+y$. فإن:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = a(x+y) = ax + ay.$$

أيضًا: $ax = xa = x(x+y) = x^2 + xy$ وبالمثل: $ay = ya = y(x+y) = yx + y^2$ ونجمع القيمتين معًا فنحصل على:

$$(x+y)^2 = ax + ay = x^2 + xy + yx + y^2$$
$$= x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

وللتأكيد نكتب مرة أخرى:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2. \qquad (1)$$

وقد رأينا هذا سابقًا في الفصل الثالث حيث: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ حصلنا عليها من بعض الاعتبارات الهندسية البسيطة.

وهناك بعض القصص التي تعتمد على (1)، فإن ليونارد أويلر عندما كتب هذه المعادلة على السبورة باعتبارها دليلًا على وجود الله، مع العلم أنه لا أحد غيره في الغرفة في ذلك الوقت يجرؤ على كشف جهله بمناقشته في ذلك. برتراند راسل عالم رياضيات من الرتبة الأولى لكن وهو طفل أجبر على إنشاد أن «مربع المجموع يساوي مجموع المربعات بإضافة ضعف حاصل ضربهم»، وقد اعترف أنه ليس لديه أي فكرة عن معنى ذلك، لكن يعرف فقط أنه إذا أخطأ فإن مُعلمه سوف يقذفه بالأشياء.

الطريقة التي بها يحافظ بها الجذر التربيعي على عمليات الضرب والقسمة وليس عمليات الجمع والطرح واحدة من أهم مصادر الحزن

لطلاب الجبر، لدينا الآن فرصة لتوضيح هذا الأمر؛ لتكن a, b ترمز إلى الأعداد الموجبة ولذلك فليس لدينا مشاكل مع أخذ الجذر التربيعي للأعداد الموجبة فيما يأتي:

من الصحيح أن:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}; \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

لرؤية التقرير الأوَّلي، نحتاج فقط إلى تربيع الطرفين ويكون مربع الطرف الأيسر هو ab والطرف الأيمن يؤدي إلى:

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})(\sqrt{a}\sqrt{b}) = (\sqrt{a}\sqrt{a})(\sqrt{b}\sqrt{b}) = ab.$$

هنا استخدمنا حقيقة أن حاصل ضرب الأعداد يمكن ترتيبه بأي شكل فيما يسمى: «قانون التبادل للضرب» للحصول على النتيجة المطلوبة. وبالمثل يمكن التأكد أن مربع الطرفين فيما يخص حالة القسمة يعطي (تحصيل الحاصل) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ وهو ما يحقق التقرير الثاني. ويجب ملاحظة أنه في الحالتين نستخدم حقيقة أنه إذا كان x، y أعدادًا موجبة ومربعاتها متساوية: $x^2 = y^2$ فإن الأعداد نفسها متساوية: $x = y$. هذا صحيح بالتأكيد، لكن لا ينطبق على أي عددين على العموم فمثلًا: $2^2 = (-2)^2 = 4$ ومع ذلك: $(2 \neq -2)$.

ولهذا السبب يجب توخي الحذر عند التعامل مع هذا النوع من الاستنتاج.

بمعنى آخر ما أوضحناه هو أن الجذر التربيعي لحاصل الضرب هو حاصل ضرب الجذور التربيعية وأن الجذر التربيعي لخارج القسمة هو خارج قسمة الجذور التربيعية. وهو ما يعني أن عمليات الضرب واستخراج الجذور التربيعية يمكن تنفيذها بأي ترتيب لتعطي نفس النتيجة، هذه الحقيقة تستخدم دائما لتبسيط الجذور التربيعية للأعداد الكبيرة:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

إلا أنه ليس صحيحًا على الإطلاق أن نتمكن من تبديل ترتيب الجمع وأخذ الجذر التربيعي، كما يتضح من المثال التالي:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5; \qquad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

في الواقع إذا كانت a, b أعدادًا موجبة فإن الجذر التربيعى للمجموع أقل من مجموع الجذور التربيعية، وذلك لأن: $(\sqrt{a+b})^2 = a + b$ ومربع مجموع الجذور:

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= a + b + 2\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

إننا الآن في سياق كافٍ من الجبر لاستخلاص الصيغة الشهيرة لحل المعادلات التربيعية (المعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية) التي تتطلب منا تقنية عامة تسمي: «استكمال المربع» فلنبدأ مع المثال: حِل المعادلة:

$$x^2 + 6x - 16 = 0.$$

أضف 16 إلى الجانبين:

$$x^2 + 6x = 16.$$

نفكر الآن في $x^2 + 6x$ كما لو كانت $x^2 + 2xy$، من الواضح أن: $2xy = 6x$. أي أن: $y = \frac{6}{2} = 3$. فإذا كان الجانب الأيسر للمعادلة هو $x^2 + 2xy + y^2$ فإنه يمكننا إعادة كتابته على الصورة $(x+y)^2$، ثم أخذ الجذر التربيعي. الخطوة التالية أن نضيف $y^2 = 3^2 = 9$ لطرفي المعادلة:

$$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9 = 25.$$

الطرف الأيسر هو مربع تام $(x+3)^2$ يمكننا الآن من حل المعادلة بدون صعوبة عندما نتذكر أن العدد الموجب له جذر تربيعي سالب كما له جذر تربيعي موجب.

$$(x+3)^2 = 25$$
$$\Rightarrow x+3 = \pm\sqrt{25} = \pm 5,$$

حيث ± 5 تعنى $+5$ و-5 وأن الرمز $\Rightarrow$ يعنى «ومن ثم». أي أن:

$$x = 5-3 = 2 \quad \text{أو} \quad x = -5-3 = -8.$$

من أجل استخدام الجبر بكفاءة نحتاج أن نتمكن من التعامل مع الأعداد الموجبة والسالبة. السبب أنه عند التعامل مع المسائل التي تحوي كميات موجبة فقط، وحلولًا موجبة، فإن العمليات الجبرية قد تخرجنا من عالم الأعداد الموجبة إلى عالم الأعداد السالبة، مع أننا قد نعود للعالم الموجب. إذا كنا نريد أن نُجري عمليات القسمة بحرية فإننا نحتاج إلى الكسور، وإذا أردنا الطرح بحرية فهناك الأعداد السلبية كما هناك الأعداد الموجبة.

يبدو أنه لا يوجد الكثير من التردد لاستخدام الكسور، افترض ذلك لأن فكرة وجود جزء من جسم مادي لا تزال ذات معنى، على الأقل في بعض المناسبات. (الوصف الكسري غير المناسب كما في حالة 2.4 من الأطفال — نكتة). كما ذكر في الفصل الثاني، قدماء المصريين قيدوا أنفسهم بالكسور ذات البسط 1 (واحد). هذا الفرض الذاتي يمثل عائقًا لبعض المسائل المهمة التي سنتناولها بعد وقت قصير.

يوجد دائمًا تحيز لمصلحة الأعداد الموجبة. البابليون عرفوا كيفية حل المعادلات التربيعية ولكنهم فقط قبلوا الحلول الموجبة (واستبعدوا الحلول السالبة). ولهذا السبب قد تبدو طريقتهم في تمثيل المعادلات التربيعية غريبة علينا. النهج المفضل كان أن يسأل عن أبعاد المستطيل المعلوم محيطه ومساحته، وهذا يؤكد أن الحلول الموجبة كانت دائمًا متاحة.

هذا النوع من المسائل يكافئ معادلة تربيعية وحيدة. نفرض أن محيط المستطيل 28 وحدة ومساحته 48 وحدة مربعة. نفرض أن x, y هي أبعاد المستطيل، فيكون لدينا:

$$2(x+y) = 28, \qquad xy = 48.$$

المعادلة الثانية تتيح كتابة $y = \frac{48}{x}$. بقسمة طرفي المعادلة الأولى على 2 والتعويض بقيمة y نحصل على:

$$x + \frac{48}{x} = 14.$$

بضرب طرفي المعادلة الناتجة في x نجد أن

$$x^2 + 48 = 14x \Longrightarrow x^2 - 14x = -48. \tag{2}$$

ويمكننا الآن تطبيق نفس الخطوات كما سبق وإكمال المربع مع علمنا أنه في الحالة العامة:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

وبذلك يمكننا إضافة $\left(\frac{14}{2}\right)^2 = 7^2 = 49$ إلى طرفي المعادلة (2) فنحصل على:

$$x^2 - 14x + 49 = -48 + 49 = 1$$
$$\Longrightarrow (x-7)^2 = 1.$$

أي أن: $x - 7 = \pm 1$ وبذلك: $x = 7 + 1 = 8$ أو $x = 7 - 1 = 6$. فإذا كانت $x = 8$ نحصل على: $y = \frac{48}{8} = 6$ أما إذا كانت $x = 6$ نحصل: $y = \frac{48}{6} = 8$ ومن ثم يوجد حل وحيد أي مستطيل له الأبعاد 6×8.

مثال آخر حيث يكشف الجبر عن حقيقة مهمة للمقادير الموجبة هو: ومرة أخرى سوف نسمح لأنفسنا بالتعامل مع الأعداد السالبة وحقيقة أن

حاصل ضرب عددين سالبين هو عدد موجب (وهي نقطة يتردد بعض الناس في قبولها).

هناك عدة طرق لإيجاد متوسط الأعداد. متوسط العددين a, b هو:

$$\frac{a+b}{2}.$$

هذا ما يسمى المتوسط الحسابي. من ناحية أخرى فإن المتوسط الهندسي لعددين موجبين هو العدد

$$g = \sqrt{ab}.$$

المتوسط الهندسي له خاصية أن المربع الذي طول ضلعه g له نفس مساحة المستطيل الذي أبعاده a, b.

إن المتوسط الهندسي مثل المتوسط العادي للوغاريتمات (مع أنه من غير المهم، فيما يأتي لشرح معنى اللوغاريتم انظر الفصل الثاني) نتذكر أن $x^{1/2}$ تعني $\sqrt{x}$ ويمكن رؤية ذلك من استخدام القانون الثالث ثم الأول للوغاريتمات.

$$\log g = \log(\sqrt{ab}) = \log\left((ab)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{\log a + \log b}{2}.$$

إذا حسبت عددًا من هذه المتوسطات فإنك تلاحظ بسرعة أن المتوسط الهندسي أصغر من المتوسط الحسابي. فمثلًا إذا كانت $a = 4$، $b = 9$ فإن المتوسط الحسابي $6.5 = \frac{(4+9)}{2}$ في حين المتوسط الهندسي لهما هو $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$ يمكنك تجربة غيرها بنفسك.

دعونا نثبت صحة ذلك باستخدام قليل من الجبر. إذا كانت a, b أعدادًا موجبة واعتبرنا العدد $(a-b)^2$، قد يكون $a - b$ عددًا سالبًا لكن مربع أي عدد c لا يكون سالبًا (في الحقيقة هو عدد موجب إلا إذا كانت $c = 0$) باستخدام ذلك ومفكوك $(a-b)^2$ نحصل على:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0.$$

بإضافة $4ab$ لطرفي هذه المتباينة حتى يكون الطرف الأيسر مربعًا تامًّا أي:

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab.$$

ومن ثم:

$$(a + b)^2 \geq 4ab.$$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين فإن:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

بالقسم على 2 نحصل على:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

وهو المطلوب إثباته: أي أن المتوسط الحسابي أكبر من أو يساوي المتوسط الهندسي.

في الواقع يمكننا أن نقول أكثر من ذلك. إذا كانت $a = b$ فإن المتوسط الحسابي = المتوسط الهندسي = a. إذا كانت $a \neq b$ فإن $(a - b)^2 > 0$ فإن الحجة السابقة توضح أن المتوسط الحسابي أكبر فعلًا من المتوسط الهندسي.

إذا كنا أكثر جرأة مع الجبر باستخدام الأعداد السالبة بحرية فإنه يمكننا حل أي معادلة تربيعية بإكمال المربع في الحالة العامة:

المعادلة العامة من الدرجة الثانية، أي أن:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

بإكمال المربع نحصل على الصيغة الشهيرة لحل المعادلة التربيعية:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ومع أن الجبر المستخدم للحصول على هذه النتيجة قاس بعض الشيء بالمعايير المدرسية، فلا يوجد به شيء جديد. الفكرة الجديدة في حل المعادلات التربيعية هي فقط إكمال المربع. بمجرد استيعاب ذلك، فإن الصيغة العامة بسيطة ومباشرة. إنها تشترط على الطالب أن يمتلك رد الفعل الجبري لمعالجة هذا المستوى من الاستنتاجات. مثلًا في أثناء الاستنتاج، إحدى الخطوات تطلبت استخدام تعبير جبر معُقّد على مقام مشترك. ماذا يؤكد لنا صحة هذا؟

كل ذلك يحدث في جمع الكسور. قد يكون التعبير معُقّدًا لكن البسط والمقام لا يزالان يرمزان لأعداد (غير محددة) ومن ثم تتبع نفس قوانين الجبر. ما القوانين ذات الصلة بذلك؟ للإجابة ننظر مجموع كسرين:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}.$$

العدد bd هو حاصل ضرب b, d أي أن bd يمكن أن يكون مقامًا مشتركًا. نضرب المقام b بالعدد d ومن ثم نضرب a بالعدد d أيضًا. ويكون التأثير هو ضرب $\frac{a}{b}$ بالعدد $\frac{d}{d} = 1$ وهذا لا يؤثر على قيمة الكسر. بالمثل نضرب $\frac{c}{d}$ في $\frac{b}{b}$ فنحصل على

$$\frac{ad}{bd} + \frac{cd}{db}.$$

هذان الكسران لهما مقام مشترك فيمكن جمع البسطين معًا أي أن:

$$\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

هذه الخطوة الأخيرة استخدمت قانون التوزيع، لرؤية ذلك اسأل نفسك ماذا يقال عند كتابة شيء مثل

$$\frac{x + y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}.$$

(في الحالة السابقة $z = bd$). القسمة على z تعني الضرب في المعكوس $s = \frac{1}{z}$. ومن ثم هذا التعبير الأخير يصبح:

$$s(x + y) = sx + sy,$$

وهو ما يعني قانون التوزيع في حالة الكسور.

نظام الحساب بالأعداد الموجبة غير مناسب للجبر لأن العمليتين الطبيعيتين الطرح والقسمة تأخذانا خارج النظام. القسمة تؤدي للكسور، وحساب الكسور صعب جدًّا لكن يمكن قبوله لأنه يمكن برهنته صراحة باستخدام أشياء مادية مثل شرائح من الكيك، لكن الطرح يؤدي للأعداد السالبة، وسوف تحتاج إلى بعض الوقت لاستيعابها. حتى في عصر النهضة فإن صلاحية استخدامها كان موضع تساؤل لأنها تبدو مفتقرة إلى تفسير مادي. الأعداد السالبة أكثر قبولًا في العالم الحديث كأعداد لها معنى، ربما لأننا ألفنا مفهوم الديون (الإقراض)، وهو التفسير للمال السالب. طبعًا الديون النقدية موجودة من آلاف السنين ومن ثم فليس ذلك كل الموضوع. ومع ذلك فمن المؤكد أن شعور الناس بالديون حقيقي، ومن ثم فإن حساب الديون، وهو يسمح على الأقل بإضافة مجموع سالب، وهذا شيء مقبول. الديون تتضاعف أكثر بعد حساب الفائدة على الدين. هذا ينطوي على ضرب هذه القيم السالبة بعوامل موجبة وهذا يؤدي إلى ديون أكثر. إذا كان رصيدك مدينًا بـ 100 جنيه بفائدة جزائية 30% فإن الرصيد سوف يصبح $-130 = (-100 \times 1.3)$ جنيه بعد عام واحد.

النقطة النفسية المهمة، على أية حال، تبدو في قبول أن حاصل ضرب عددين سالبين عدد موجب. وهذا بالضبط ما تحتاج إليه حتى يكون نظامك الجبري متوافقًا، مثال بسيط يشرح ضرورة هذه القاعدة هو: $1 = 1 \times 1 = (2 - 1)(2 - 1)$. من ناحية أخرى معاملة الطرح كما لو كان إضافة المعكوس فيكون لدينا:

$$1 = (2 - 1)(2 - 1) = (2 + (^-1))(2 + (^-1)).$$

وباستخدام قانون التوزيع يمكننا فك الأقواس بضرب كل حد من القوس الأول في كل حد من القوس الثاني وجمعها كلها فنحصل على أربعة حدود، الحساب مستمر

$$
\begin{aligned}
2(2+(^{-}1)) + (^{-}1)(2+(^{-}1)) \\
&= (2\times 2) + (2\times(^{-}1)) + ((^{-}1)\times 2) + ((^{-}1)\times(^{-}1)) \\
&= 4 + (^{-}2) + (^{-}2) + ((^{-}1)\times(^{-}1)) = 0 + ((^{-}1)\times(^{-}1)) \\
&= (^{-}1)\times(^{-}1).
\end{aligned}
$$

ومن ثم مما سبق نحصل على:

$$(^{-}1)\times(^{-}1) = 1:$$

وكل ما عدا ذلك سيؤدي إلى إجابة خاطئة. ومع ذلك فعندما يقول أي مدرس إن حاصل ضرب عددين سالبين هو عدد موجب، فإنه عرضة لتلقي بعض الملاحظات على غرار «لا يمكنك ضرب كومتين سالبتين من النقود للحصول على كومة موجبة من النقود». ومع أن هذا يبدو اعتراضًا مقنعًا فإنه هراء ولا معنى لضرب كومة من النقود بكومة أخرى في المقام الأول، سواء اعتبرت الكومة فائدة أم دينًا، ما تقوله الرياضيات هو أن في أي موقع له معنى بضرب سالبين حقا الإجابة تكون موجبة.

ولهذا تحتاج القواعد أن يكون ضرب عددين من نفس الإشارة دائمًا موجبًا ولكن ضرب الأعداد بإشارات مختلفة يكون سالبًا. يمكننا الآن فك أي حاصل ضرب من الأقواس مستخدمين قانون التوزيع وهذه القواعد. لفك قوس يحتوي على الطرح، يمكننا معاملة الإشارة السالبة وكأنها جمع المعكوس، تحتاج فقط لتحقيق أن: $(^{-}a)b = a(^{-}b) = {}^{-}(ab)$ حيث كل منها معكوس لحاصل الضرب ab:

$$a(b-c) = a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab - ac.$$

فمثلًا:

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x(x-y) - y(x-y)$$
$$= x^2 - xy - yx - y(-y).$$

طرح $y(-y) = -y^2$ تعني إضافة معكوسه y^2، ونحصل على:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

بطريقة مماثلة نستنتج تعبيرًا للفرق بين مربعين:

$$(x+y)(x-y) = x(x-y) + y(x-y)$$
$$= x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2.$$

مرة أخرى فإن عكس هذا الاتجاه هو الأكثر استخدامًا. الفرق بين مربعين يمكن كتابته كحاصل ضرب، مثلًا:

$$n^2 - 1 = n^2 - 1^2 = (n+1)(n-1),$$

ولعلك تذكر المسألة رقم ٤ في الفصل الأول:

القوتان العُليان التاليتان للمقدار $x+y$ نحصل عليهما من التعبيرات:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

ليس من الصعب وصف المفكوك في الحالة العامة $(x+y)^n$. وقد تبدو مزعجة من النظرة الأولى لأنه سيوجد عدد كبير من الحدود عند فك كل الأقواس. مما يجعلها صعبة التتبع. على أية حال نسأل كيف يبدو الحد العام؟ هو له الصيغة $x^r y^s$ حيث $r+s=n$. السبب في ذلك هو أن أي حد يحتوي أحد الرمزين x أو y من كل من n من الأقواس ومن ثم العدد الكلى لكل من xs, ys في كل حد يجب أن يساوي n. فمثلًا في مفكوك $(x+y)^4$،

وأحد الحدود الناتجة من اختيار x من القوس الأول والثالث والرابع وأخذ y من القوس الثاني، يعطي المشاركة بـ $xyxx = x^3y$ في المفكوك الكلي. يأتي الآن حساب عدد التكررات لكل واحد من الحدود الناشئة.

متتابعة المعاملات في المثالين السابقين هي على الترتيب $(1,3,3,1)$ و$(1,4,6,4,1)$. إذا رجعت إلى صورة مثلث باسكال في الفصل السابق فإنك تجد أن هذه تمثل الصف الثالث والرابع من المصفوفة (المثلث). ولهذا السبب الأعداد في المثلث تسمى معاملات ذات الحدين. ولأن الصف النوني يسمح لك بكتابة مفكوك القوة النونية لتعبير ذات الحدين (ثنائي الحدود) $x + y$. السبب أن هذا يعمل بسهولة عندما نتذكر أن $C(n, r)$ تعد عدد طرق اختيار r من الأشياء من أصل n (المتاحة). للحصول على حد على الشكل $x^r y^{n-r}$ في مفكوك ذات الحدين يجب اختيار الرمز x من r من n من الأقواس المتاحة وأن الرمز y من باقي الأقواس وعددها $n - r$، العدد الإجمالي لطرق اختيار r من الأقواس من عدد n. بحد ذاتها تعني $C(n, r)$ ومن ثم فإن معامل $x^r y^{n-r}$ في مفكوك ذات الحدين $(x + y)^n$ هو عدد ذي الحدين $C(n, r)$. هذه الحقيقة تسمى نظرية ذات الحدين.

مراجعة للكسور المصرية

نتذكر من الفصل الثاني ما قيل إنه يمكن التعبير دائمًا عن الكسر الحقيقي $\frac{m}{n}$ كمجموع كسور مختلفة لها البسط واحد فمثلًا:

$$\frac{6}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{312}.$$

الطريقة المقترحة هي طرح أكبر معكوس متاح عند كل خطوة مع الادعاء بأن الطريقة سوف تتوقف بعد m من الخطوات. لنر لماذا يحدث هذا:

أولًا: ما هو أكبر معكوس أقل من الكسر الحقيقي $\frac{m}{n}$؟ فقط الحالة عندما تكون m على الأقل تساوي 2 تحتاج للاهتمام، ولنفرض أننا بسطنا الكسر حتى أصبحت m, n ليس بينها عامل مشترك إلا «1» (الواحد). وبما

أن $m < n$ فإننا نستطيع قسمة n على m، ولنفترض أن n تقبل القسمة على m عدد k من المرات ويتبقى r بحيث يكون:

$$n = km + r, \quad 1 \le r \le m - 1,\ 1 \le k.$$

قيمة k على الأقل «1» لأن $m < n$. الباقي r على الأقل 1 لأن n ليست مضاعفًا لـ m والعددان ليس لهما عامل مشترك إلا «1». ومن ثم أكبر معكوس أقل من $\frac{m}{n}$ هو $\frac{1}{(k+1)}$ لأن:

$$km < n = km + r < km + m = m(k + 1).$$

بأخذ المعكوس (وهو يؤدي إلى أن المتباينتين تغير اتجاههما):

$$\frac{1}{km} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m(k+1)},$$

بالضرب في m لجميع الأطراف وإعادة الترتيب:

$$\frac{1}{k+1} < \frac{m}{n} < \frac{1}{k}.$$

أي أن $\frac{1}{(k+1)}$ هو أكبر كسر بسطه هو «1» أصغر من $\frac{m}{n}$. لأن الكسر التالي، $\frac{1}{k}$، كبير جدًا.

نعلم الآن كيف نجري هذه الحسابات. في المثال السابق إذا كانت $m = 6$، $n = 13$ نبدأ بـ $13 = 2 \times 6 + 1$ ومن ثم أول قيمة لـ k هي 2. ومن ثم نطرح من الكسر $\frac{1}{(2+1)} = \frac{1}{3}$ فنحصل على:

$$\frac{6}{13} - \frac{1}{3} = \frac{6 \times 3 - 1 \times 13}{39} = \frac{5}{39}.$$

ثم $39 = 7 \times 5 + 4$ وتكون القيمة التالية لـ k هي 7، ونحصل على $\frac{1}{8}$ وهو المعكوس الثاني بالطرح

$$\frac{5}{39} - \frac{1}{8} = \frac{5 \times 8 - 1 \times 39}{312} = \frac{1}{312}.$$

وتكون النتيجة:

$$\frac{6}{13}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{312}.$$

لإثبات أن العملية تنتهي دائمًا بعد m من الخطوات أو أقل نتطلب شيئًا من الجبر، دعونا ننظر بعناية لما يحدث في عملية الطرح الأولى:

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{k+1}=\frac{m(k+1)-n}{n(k+1)}.$$

ونتذكر أن $n=mk+r$ فنحصل على:

$$\frac{m(k+1)-(mk+r)}{n(k+1)}=\frac{mk+m-mk-r}{n(k+1)}=\frac{m-r}{n(k+1)}.$$

الملاحظة الرئيسية تكمن فيما حدث للبسط؛ حدث نقصان من القيمة m إلى القيمة $m-r$، لأن r عدد موجب فمن المتوقع أن البسط في كل كسر آت أقل من سابقة. أي أن بعد $m-1$ من الخطوات أو أقل فالطريقة سوف تنتج باقيًا هو نفسه الكسر ذو البسط واحد (كسر الوحدة) وبذلك تنتهي الطريقة. (هذا مثال يوضح الحجة الاستنتاجية كما قدمت أولًا فيما يخص تقسيم الفودكا في الفصل الأول المبدأ هو اختصار الحالة العامة إلى حالة سابقة، في هذا المثال نبين كيف ننتقل من الحالة العامة m إلى القيمة الأقل $m-r$).

بقي أن نلاحظ أن المعكوس التالي المطروح سيكون دائمًا أصغر من سابقه (حيث إن هذا سوف يضمن أن جميع الكسور ستكون مختلفة.) بالطريقة التي جرى بها الاختيار نرى أن المعكوس التالي لا يمكن أن يكون أكبر من سابقة ولا أن يساويه لأن $\frac{2}{(k+1)}$ أكبر من $\frac{m}{n}$ لأن:

$$\frac{m}{n}<\frac{1}{k}\leq\frac{2}{k+1}.$$

وهذه المتباينة من السهل إثباتها لأن عملية ضرب الطرفين في الوسطين تؤدي إلى:

$$k + 1 \le 2k \Leftrightarrow 1 \le k,$$

وكما لاحظنا فهذا صحيح لأن الكسر $\frac{m}{n}$ كسر حقيقي.

الفصل السادس

أسئلة كثيرة وإجابتها

في معظم بلدان العالم الغربي تتاح للمواطنين فرصة لعب يانصيب تديره الدولة، وانضمت بريطانيا حديثًا لهذه اللعبة، ولم يوحد الدولة منذ عام ١٩٩٤ شيء مثلما فعل اليانصيب الوطني، وعلى ذلك فكتابنا مضطر للإجابة على هذا السؤال:

١- ما هي فرصك للفوز في اليانصيب؟

نماذج اليانصيب تقريبًا متماثلة في جميع أنحاء العالم، وفي بريطانيا المباراة الأساسية تحوي اختيار مجموعة من 6 كرات مرقمة (في أي ترتيب)، وتفوز إذا كان اختيارك يتفق مع الاختيار الآلي العشوائي لـ 6 كرات من مجموعة الكرات المرقمة من واحد إلى 49.

عدد طرق اختيار ست كرات للظهور مع مراعاة الترتيب هو: $44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49$. لا يمكن اختيار نفس الكرة مرتين وبالتالي تنقص الإمكانية واحدًا في كل مرة للكرة التالية؛ فإذا أخذت مجموعة معينة من ست كرات وتشمل: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ في هذا الترتيب الممكن فإن فرصتك في الفوز هي:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44} = \frac{1}{49 \times 47 \times 46 \times 44 \times 3}$$
$$= \frac{1}{13,983,816}.$$

فقرصتك في الفوز هي واحد من 14 مليون. اليانصيب يعتمد على عدم تقديرنا لماهية هذا العدد، الخط المكون من 14 مليون نقطة biros يمتد من إنجلترا حتى منغوليا، هل تتوقع أن يكون اختيارك نقطة من هذه النقط عشوائيًّا؟

النصيحة الوحيدة التي يقدمها لك عالِم الرياضيات إذا قررت أن تراهن هي كالآتي: أولًا اخترْ عددًا أكبر من 32 لأن الأعداد الأصغر من 32 شائعة؛ فالناس عادة تختار تاريخ ميلادهم أو تاريخ ميلاد أصدقائهم أو أقاربهم، وباختيارك أعدادًا كبيرة من الممكن أن تحصل على جائزة كبيرة وسوف تكون كبيرة جدًّا لأن عددًا قليلًا من الناس اختار نفس الأعداد. ثانيًا، ولراحة البال، من المهم ألا تختار نفس الأعداد في كل مرة؛ فإذا فعلت فإنك ستكون مجبرًا على اللعب كل أسبوع وتنفق باقي حياتك في رعب أن عدد الحظ عندك أتى في أسبوع لم تشترك فيه، وأنت لن تختار — بالتأكيد — الأعداد: $1, 2, 3, 4, 5, 6$ فالآلاف من الناس تفعل ذلك كل أسبوع، فإذا كسب هذا الاختيار يومًا فإن حصتهم من الجائزة المشتركة ستكون ضئيلة. طبعًا لا يزال هؤلاء يفوزون أكثر من غيرهم الذين اختاروا اختيارات أخرى، فالأمر على أية حال هو أنك لن تفوز بجائزة كبيرة مع هذه الأعداد أو الاختيارات المتشابهة لأنها منتشرة جدًّا.

توجد طريقة أخرى، أكثر ديناميكية، لحل هذه المسألة وتحافظ على التفاعل مع الوضع الحقيقي: فرصة اختيارك لعدد 6 من الأعداد بعينها تظهر جلية بعد سحب الكرة الأولى وتكون $\frac{6}{49}$ لأنك بدأت بـ 6 من 49 عدد ممكن، لهذا الأسبوع المحظوظ يظل اختيارك الثاني 5 من أصل 48 أي $\frac{5}{48}$ لأن الماكينة لديها 48 كرة. أي أن الفرصة بعد دورتين للماكينة هي $\frac{5}{48}$ من $\frac{6}{49}$ أي أن:

$$\frac{6}{49} \times \frac{5}{48}.$$

نستمر بهذا الأسلوب وسوف نرى أن فرصة فوزك لا تزال قائمة لكن تساوي:

$$\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{1}{44}.$$

السؤال التالي: هو مسألة احتمالية عملية من نوع مختلف تمامًا، لقد فهمت أن هذا السؤال وُضِعَ لطلاب الطب في أمريكا، وكانت الإجابة تنذر بالحظر بشكل ما.

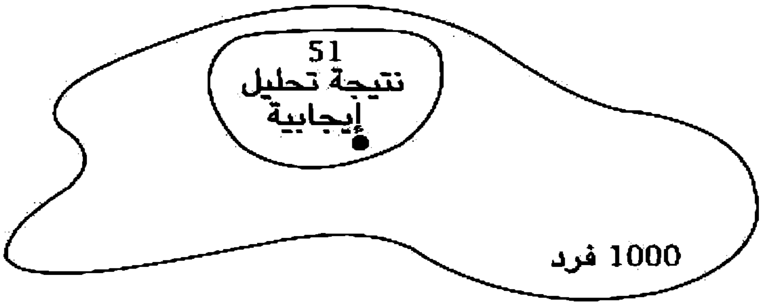
لدينا اختبار لمرض معين يعطي نتيجة إيجابية إذا كان الشخص مصابًا بهذا المرض، لكن هناك احتمال بنسبة 5% أن يكون الاختبار إيجابيًّا والشخص غير مريض، ومن المعروف أن واحدًا في الألف من السكان مصاب بهذا المرض، وتُصاغ المشكلة على النحو الآتي:

٢- الاختيار العشوائي لشخص من مجموعة كان اختبارهم إيجابيًّا، فما احتمال أن يكون هذا الشخص حاملًا للمرض؟

يبدو أن العديد من الطلاب كانت إجابتهم 0.95% التبرير المبدئي يعطي أن الاختبار 95% دقيق. في الواقع هذا لن يحدث فإجاباتهم لم تضع في الحسبان انتشار المرض في السكان وهذا الانتشار سيؤثر بوضوح في الإجابة؛ فمثلًا إذا كان المرض هو الجدري — الذي تم استئصاله تمامًا — فإن الإجابة ستكون صفرًا، فلا يوجد احتمال لمريض بالجدري حتى إذا كان الاختبار موجبًا، ولهذا فإننا نرى أنه إذا كان المرض نادرًا جدًّا فإن فرصة أن تكون نتيجة الاختبار الإيجابية زائفة ستكون مرتفعة جدًّا؛ فكلما ندر المرض زاد احتمال أن تكون النتيجة موجبة زائفة، إذن ما إجابة سؤالنا؟

احتمال أن شخصًا ما مصاب بهذا المرض هي واحد في الألف، أي 0.001. ولكننا هنا نعرف المزيد؛ فإن هذا الشخص اختير عشوائيًّا من نوع خاص: أن نتيجته موجبة لهذا الاختيار، ولنسمِّ هؤلاء «الأفراد الموجبين» ويصبح السؤال: ما نسبة المرضى بين الأفراد الموجبين؟

لنأخذ قطاعًا عاديًّا من السكان يتكون من 1000 فرد (الشكل ١): في المتوسط سيكون هناك شخص واحد يحمل المرض، و5% من الباقين — وإذا قربناه إلى عدد صحيح يكون 50 — سيكون اختباره إيجابيًّا كاذبًا، ولدينا فرد اختير عشوائيًّا من الأفراد الموجبين، ويمكننا الآن



شكل ١

أن نرى أنه يوجد احتمال واحد من 51 أن الشخص يحمل المرض، ويترتب على ذلك أن الإجابة الصحيحة ستكون أقل قليلا من 2% وليست 95%.

مسائل الاحتمالات عادة تنطوي على بعض الحيل، لاسيما المسائل التي تحتوى على احتمالات مشروطة حيث تُسأل عن احتمال وقوع حادثة مرتبطة بوقوع حادثة أخرى، (في هذا المثال تريد معرفة احتمال أن يكون الشخص مريضًا في ظل الاختبارات الموجبة). هذه المسائل مخادعة تمامًا، فهذا شيء واحد لا يستطيع عمل أي مشكلة، إنه شيء آخر تمامًا تتصور أن تفعله ويؤدي إلى استنتاج خاطئ تمامًا، هذا المثال يوضح كيف يمكن بسهولة خداع حتى الأذكياء والمتعلمين، ومن الجدير بالذكر أنه يوجد من يفهم الرياضيات.

مسألة الاحتمالات المشروطة التالية قديمة، لكن تحافظ على الظهور دائمًا بتخمينات مختلفة. أحيانًا تُعْرَف باسم «مشكلة مونتي هال» والنسخة الشعبية المتداولة هي كالآتي:

متسابق في لعبة بعرض تليفزيوني يرى ثلاثة أبواب مرقمة، خلف أحدها الجائزة الكبرى وخلف الآخرين توجد ماعز (لا تسألني لماذا الماعز). اللاعب يختار الباب، ومضيف العرض التليفزيوني الذي يعلم ماذا وراء كل باب، يفتح بابًا آخر ويبين الماعز للمتسابقين، والمتسابق له حق الاختيار

إما أن يظل عند اختياره الأول أو يختار الباب الآخر الذي لم يفتح بعد، والسؤال هو:

٣- هل يبقى المتسابق مع اختياره أم يغيره في مشكلة مونتي هال؟

الجواب نعم يجب أن يغير لأنه يضاعف له فرص الفوز، ومعظم الناس — إن لم يكن جميعهم — يجدون أن هذا سيعارض توقعاتهم، لماذا ستكون الأبواب التي لم تفتح بعد أكثر ترجيحًا لوجود الجائزة من الباب الذي اختاره المتسابق في المرحلة الأولى؟ نوضح هنا لماذا يكون التحول هو الاستراتيجية الأفضل.

المتسابق يكون اختياره الأول، مثلًا الباب رقم 1، احتمال أن يكون هذا الاختيار صحيحًا هي $\frac{1}{3}$، مونتي هال يبين لك الماعز وراء أحد الأبواب الأخرى، وبالتالي فإن احتمال الباب (1) أن يكون صحيحًا لا تزال $\frac{1}{3}$ بعد هذا العمل، ولأن الجائزة ليست خلف الباب الذي فتحه مونتي واحتمال أن يكون خلف الباب الثالث تصبح $\frac{2}{3}$.

آلية هذا العمل تصبح أكثر وضوحًا إذا زدنا عدد الأبواب من 3 إلى 100، وبما أن هذه تجربة ذهنية (فكرية) يمكننا أن نزيد العدد إلى 14 مليون، وتوجد جائزة واحدة، والباقي ماعز. إذا اخترت الباب رقم واحد فمؤكد أنك مخطئ لأن فرصتك ستكون 1 من 14,000,000 على وجه الدقة. مونتي يريك الآن الماعز خلف جميع الأبواب ما عدا الباب الأول وبابًا آخر، فإذا أنت لم تكسب اليانصيب في المكان الأول (وهذا مؤكد) وأن هناك ماعزًا خلف الباب الأول أيضًا، ويستطيع أن يريك الماعز الأخرى، فبالتأكيد الجائزة وراء الباب المتبقي، والواضح أن عليك تبديل الاختيار، لأن التعديل سيكون خطأ في الحالة المستبعدة حتى لو كان اختيارك صحيحًا في المرة الأولى.

الحجة لا تختلف عن حالة الأبواب الثلاثة، فقط الاحتمالات أقل تطرفًا، إذا كنت غير مقتنع حتى الآن، حاول تجربة هذه الطريقة مع صديق مثلًا باستخدام عشر علب كبريت أو ما يشبه ذلك، ولن يكون هناك تكرارات

كثيرة لقوة الأسباب السابقة وتجعل نفسها تتحقق. على أية حال يوجد القليل الذي يمكن أن يضاف لأن الشرح الذي تقدم يعني ضمنيًّا أن مونتى عنده اختيار بين اثنين من الماعز ليريها لك (في حالة أن الباب واحد هو الجائزة) فهو يختار عشوائيًّا، فإذا استخدم طريقة أخرى، وعَلِمَ المتسابق بذلك فيمكنه استخدام استراتيجية أفضل؛ مثلًا إذا علمنا أن مونتي كان كسولًا وأظهر دائمًا ما يوجد خلف الأبواب ذات الأرقام الأعلى من البابين الباقيين إذا استطاع اختيار الأرقام الأقل فقط حتى لا يظهر بالجائزة (فإن تلك ستكون معلومات مهمة) في حالة أن المتسابق اختار الباب رقم (1) وأن مونتي أراه الماعز خلف الباب رقم (2)، فإن اللاعب يجب أن يعلم بالتأكيد أن الجائزة خلف الباب (3) وسوف يحصل عليها.

مشكلة مماثلة تمامًا تخص ثلاثة سجناء سميث وجونز وأنت؛ حكم عليهم جميعًا بالإعدام وسينفذ في الصباح، وبطريقة غريبة قرر القيصر أن يؤجل الإعدام لواحد منهم، لقد اتخذ قراره لأحدهم، في الحقيقة الحارس المسئول يعلم من الذي سيعيش ومن الذي سيموت، لكن القيصر رغب في أن يحتفظ بالأنباء الطيبة لتكون مفاجأة، ومنع الحارس من كشف الحقيقة.

أنت وضعت خطة ماهرة لتحسين فرصك، اقتربت من الحارس لتقول له إنك تعرف أنه لا يمكنه إخبارك إذا كنت أنت الشخص المختار، لكن على الأقل واحد من زملائك في الزنزانة المجاورة سينفذ فيه الحكم، وبالتالي ليس من الضار إذا كشف اسم واحد غيرك لا يستحق الرحمة، الحارس تأخذه الشفقة ويوافق ويقول كلمة واحدة «جونز». أنت الآن ضمنت نفسك مع المنطق الزائف التالي:

> يا جونز المسكين يا من ستقطع رأسه. حسنًا ذلك يعنى أنك الآن لديك فرصة 50–50 لأن الآخر الذي سينفذ فيه الحكم قد يكون سميث أو تكون أنت بالمثل.

بطريقة ما تكون قد زدت معرفة احتمالات حياتك من 1 من 3 إلى 1 من 2 وتستطيع أن تنام هادئًا هدوءًا ما.

في الواقع ما قمت به ليس جيدا على الإطلاق (إذا كانت هذه الاستراتيجية صالحة فماذا يحدث إذا استخدمها كل من الثلاثة). الحارس ببساطة جعلك ترى الماعز خلف أحد الأبواب الأخرى، يوجد احتمال واحد من ثلاثة أن يكون خلف بابك في الصباح جائزة الرأفة، ومع ذلك فإن جونز وسميث اللذين حدث واستمعا لحديثك مع الحارس فالموضوع مختلف تمامًا. جونز البائس أصبح «الماعز الواضح»، سينفذ فيه الحكم في الصباح بلا شك، من ناحية أخرى فإن سميث له الحق في أن يشعر بالارتياح إلى حد ما؛ لأن فرصتك في الحياة لا تزال $\frac{1}{3}$ أما سميث فإن فرصته تحسنت تكميلًا لفرصتك أي $\frac{2}{3}$. خطتك الصغيرة لم تفدك وإنما أفادت سميث بعض الشيء، ومع ذلك فإن كلًّا منكما أنت وسميث لا بد أن ينتظر حتى الفجر عندما تُفتح كل الأبواب لمعرفة مصيرك الحقيقي.

تصور آخر مشابه أقل إثارة من السؤال المعروف لمؤلفي كتب التسلية وممتحني الرياضيات لسنوات: لديك كرة حمراء وكرتان صفراوان، رُقِّمَتْ واحد واثنين في قبعة، أخذ صديقك كرتين من القبعة عشوائيًّا في نفس الوقت، ما احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأصفر؟

لأنك تختار كرتين من ثلاث وكلها متساوية في احتمالات الاختيار، فإن احتمال أن تكون أحدهما من اللون الأحمر هي $\frac{2}{3}$، وبالتالي احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأصفر هو $\frac{1}{3}$ (أي عدم اختيار الأحمر).

لنفرض أنك رأيت لونًا أصفر من بين أصابع صديقك عندما استخرج الكرات، فإذا أعطيت هذه المعلومة الزائدة ماذا يكون الآن احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأصفر؟

الإجابة لا تزال $\frac{1}{3}$، طبعًا لم تحصل على معلومات زائدة؛ فأنت تعرف أصلًا أن واحدة على الأقل من الكرات لا بد أن تكون صفراء، فالنظرة الخاطفة لم تزد معلوماتك شيئًا.

أخيرًا، لنفرض أنك تجسست ليس فقط على اللون الأصفر بل رأيت أيضا العدد (1) على الكرة الصفراء التي كانت بين أصابع صديقك، ما احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأصفر الآن؟

هذا غَيَّر الوضع حقًّا؛ فإنك تعلم أن واحدة من الكرات هي صفراء رقم Y_1 والأخرى قد تكون صفراء رقم Y_2 أو الكرة الحمراء وهما احتمالان متساويان، وبالتالي فإن احتمال أنه أخذ كرتين من اللون الأصفر ازداد من $\frac{1}{3}$ إلى $\frac{1}{2}$.

لماذا يهم أن تعرف أن الكرة الصفراء مرقمة واحد أو اثنين؟ الإجابة أنه لا يهم العدد الذي كان، ما يهم هو «معرفة» العدد الذي كان.

تلتقط موضوع الإعدام في السؤال السابق، دعونا ننظر الموضوع الآتي:

٤- ما احتمال فوز اللاعب الأول في لعبة الروليت الروسية؟

إذا كنت لا تعرف هذه اللعبة القاتلة، فاسمح لي بشرح بعض قواعدها: تتكون اللعبة من لاعبين، كل لاعب يصوب مسدسه إلى رأسه، توجد طلقة واحدة في أحد الأماكن الستة في الخزانة المستديرة للمسدس، كل واحد من اللاعبين يأخذ دوره في إطلاق المسدس، وقبل الإطلاق يدير اللاعب الخزانة حتى لا يعرف مكان الطلقة داخل الخزانة، يستمر اللعب حتى ينجح أحدهما في قتل نفسه، هنا يعلن اللاعب الثاني النتيجة.

هذه لعبة غير عادلة لأن اللاعب الذي يبدأ له ميزة طفيفة، لكن السؤال هو: ما احتمال أن يقتل اللاعب الأول نفسه (يفوز) بالضبط؟ سوف نرى في الفصل القادم أنه توجد طريقة طبيعية لحل هذه المسألة باستخدام المتسلسلة الهندسية، من الممكن على أي حال الحصول على الإجابة حالًا باستغلال الموقف المتماثل تقريبا:

ليكن اللاعب الأول A، والثاني B، مع احتمال a، b للمكسب على الترتيب، وبالطبع بما أن المسدس سوف يُطلق عاجلًا أم آجلًا فيكون لدينا $a + b = 1$، أي من المؤكد سوف يكسب أحد اللاعبين. الآن الطلقة الأولى في المسابقة ستكون قاتلة أم لا؛ إذا كانت قاتلة فستكون فرصة اللاعب B في الفوز صفرًا. على أية حال يوجد احتمال $\frac{5}{6}$ أن تكون غير قاتلة، في هذه

الحالة يتبادل اللاعبان A, B الأدوار ويكون B هو اللاعب صاحب الميزة، بكلمات أخرى، في حالة أن الطلقة الأولى فارغة فإن احتمال أن يكون B هو الفائز هي a، وهو الاحتمال الأصلي الخاص بـ A، هذا يعطي معادلة سهلة للعلاقة بين a، b وهي.

$$b = \frac{5}{6}a,$$

بتعويض ذلك في العلاقة $b = 1 - a$ نحصل على

$$1 - a = \frac{5}{6}a \Rightarrow 1 = \frac{11}{6}a \Rightarrow a = \frac{6}{11}.$$

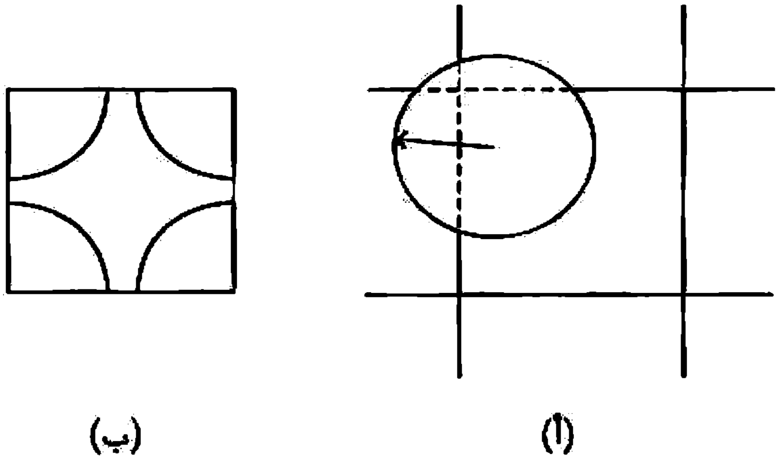
أي أن فرصة اللاعب الأول في الفوز هي 54.5%.

لننظر الآن إلى مسألة تجمع بين الفرص مع الهندسة.

٥- إذا تدحرجت عملة معدنية على رقعة شطرنج، ما احتمال أن تستقر بحيث تغطي ركنًا من مربع؟

المقصود بهذا السؤال هو: إذا كررنا هذه التجربة مرات عديدة، ما النسبة على المدى الطويل؟ ليكن عدد بين صفر وواحد، لفرص حدوث أن تقف العملة المعدنية على بعض الأركان، الإجابة تعتمد طبعًا على حجم العملة، سوف نفرض هنا ما يكون طبيعيًّا في حالة الممارسة، وهو أن قطر العملة لا يزيد عن طول ضلع المربعات على رقعة الشطرنج، سوف نرى ما الذي يحدث وقد لا يكون كذلك بعد قليل.

مرة أخرى لحل هذه المسألة علينا رؤيتها من زاوية مختلفة، الملاحظة الرئيسية في هذه المناسبة هي أن العملة سوف تغطي ركنًا إذا — وفقط إذا — كانت المسافة من مركز العملة لأحد الأركان لا تزيد عن نصف قطر العملة (انظر الشكل ٢(أ)).



شكل ٢

مركز العملة سيقع داخل بعض المربعات وهي سوف تقع على أحد الأماكن أو غيره بنفس الاحتمال. المنطقة المظللة في شكل ٢(ب) توضح المساحة القريبة من الركن واللازمة حتى تتمكن العملة من تغطيته، ويجب أن يقع بها مركز العملة. احتمال أن تغطي العملة الركن هي بالضبط النسبة بين المساحة المظللة إلى المساحة الكلية للمربع، المناطق المظللة معًا تكافئ مساحة دائرة العملة نفسها وبالتالي يكون الجواب: احتمال أن العملة تغطي ركنًا هي:

$$\frac{\text{مساحة العملة}}{\text{مساحة كل مربع}}$$

كمثال خاص، لنفرض أن قطر العملة يساوي طول ضلع المربع. ليكن هذا الطول 2 وحدة وبالتالي نصف القطر r للعملة هو وحدة واحدة. مساحة العملة هي $\pi r^2 = \pi$ ومساحة المربع هي: $2^2 = 4$، وبالتالي تكون الإجابة في هذه الحالة $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$.

المسألة ليست أصعب كثيرًا إذا كانت العملة أكبر من المربع، من حيث المبدأ يمكن حلها بنفس الطريقة، لكن الآن أرباع الدوائر في الشكل السابق سوف تتداخل وبالتالي فإن حساب المساحة الكلية سوف يكون أصعب وإن

كانت لا تزال أولية بما يكفي. علماء الرياضيات مذنبون في بعض الأحيان للغوص في مسائل تصبح مربكة قليلًا إذا لم تحتوِ على شيء جديد حقًّا. ربما تجدر الإشارة إلى أنه لا بد من إمكانية الإجابة على السؤال عن مدى كبر العملة حتى نتأكد أنها يجب أن تغطي ركنًا، وهذا سيكون عندما تكون أرباع الدائرة تغطي تمامًا المربع بالكامل، وهذا يحدث عندما يكون نصف قطر العملة على الأقل يساوي نصف طول قطر المربع، أو بلغة بسيطة عندما يكون طول قطر العملة يساوي على الأقل طول قطر المربع.

هذه مسألة احتمالات هندسية، وهو فرع من الرياضيات يدرس فرصة سلوك الأشكال، والاحتمالات الهندسية يمكن تطبيقها في المسائل التي تحتوى استنتاجًا عن أشياء من منظور قطاع عشوائي للشيء؛ الشيء في هذا السؤال يمكن أن يكون أي شيء من عينة من الذهب إلى نسيج من المخ. والأكثر من ذلك أن المشاكل الجيدة مثل عُملتنا المتدحرجة دائمًا ما تقدم مكافأة ضئيلة. مثال العملة المتدحرجة يوضح أنه من الممكن تعيين قيمة العدد π من خلال هذه التجربة: إذا كررت التجربة مرات عديدة بعملة بعرض المربع فإن قيمة π ستقرب بأربع مرات نسبة النجاح في التجربة، النجاح هنا يعني أنه عندما تغطي العملة الركن تكون النتيجة.

الحصول على العدد π من هذه المسألة لا يثير الدهشة ما دامت المسألة تحتوي على شيء دائري. أيضاً يمكن تقدير π بالسؤال التقليدي عن الاحتمال الهندسي، وتسمى مشكلة إبرة بوفون (Buffon's Needle) ويبدو أنها لا تحتوي إلا على خطوط مستقيمة.

المسألة هي: ستسقط إبرة على ألواح الأرضية، ما احتمال أن الإبرة ستسقط في شق بين الألواح؟ مرة أخرى الإجابة تعتمد على طول الإبرة، ومرة أخرى فهي تحتوى π، وبالتالي فإن التقدير الفني لـ π يمكن إيجاده بمعرفة نسبة حالات سقوط الإبرة في الشق في تجربة طويلة الأمد. بدون الخوض في الحسابات يمكنني إعطاء تفسير أين يوجد الجانب الدائري للمسألة بحيث يسمح لـ π بالظهور في الحل. سواء ضربت الإبرة الشق أم لا فهذا يعتمد على متغيرين مستقلين: مسافة مركز الإبرة من

أقرب شق، ويمكن أن يكون أي قيمة من صفر إلى نصف عرض لوح الأرضية، والزاوية التي تصنعها الإبرة مع الخط المار بمركزها وموازٍ لخط لوح الأرضية، وهذا يمكن أخذه، باحتمالات متساوية، أي قيمة بين صفر حتى $90°$. هذا الجانب الأخير من الحسابات يُدخل حساب المثلثات الدائري للمسألة وبالتالي يؤدي في النهاية إلى π.

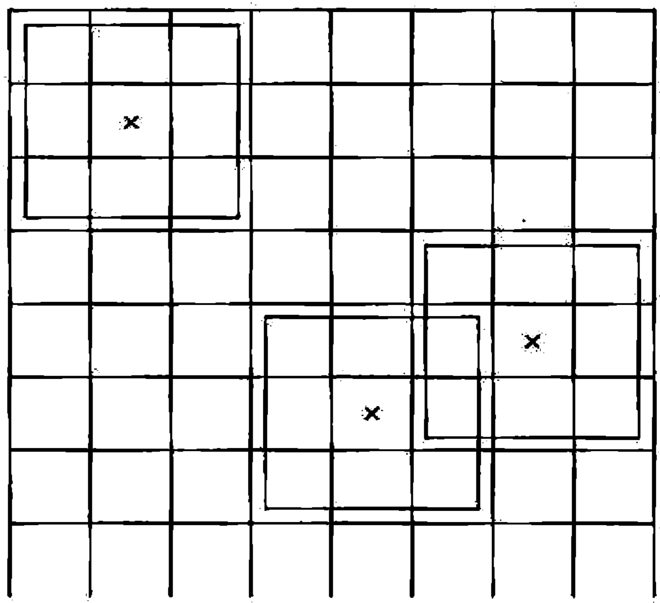
أخيرًا ونحن مع مسألة رقعة الشطرنج ننظر إلى السؤال الآتي.

٦- كم عدد المربعات على رقعة الشطرنج؟

هذه المسألة ليست تافهة كما تبدو لأننا طبعًا لا نعني فقط $8 \times 8 = 64$ وحدة مربعة، بل أيضًا 3×3، 2×2 وكل المربعات الأكبر أيضًا. مرة أخرى مثل العملة المتدحرجة، ربما تكون أسهل قليلًا إذا حاولنا إحصاء سمة هندسية أخرى وهي تكافئ ما نحن مهتمون به، لنكن أكثر دقة فمن السهل، مثلًا إحصاء جميع المربعات 3×3 من خلال مراكزها (شكل ٣). مربع الوحدة نفسه هو مركز مربع 3×3 إذا — وفقط إذا — لم يقع على حافة الرقعة هذه المربعات تمثل رقعة صغيرة 6×6 داخل الرقعة الأصلية، وبالتالي يوجد 36 مربعًا بهذا الشرط. مراكز المربعات 2×2 هي جميع أركان المربعات المكونة للمربع المركزي 6×6 (رقعة أصغر)، ويوجد 7×7 من هذه الأركان أي 49 مربعًا 2×2. وبالتالي فإن مجموع مربعات الوحدة، المربعات 2×2 والمربعات 3×3 هي: $6^2 + 7^2 + 8^2$. وبالتالي لا توجد صعوبة في أن تقتنع أن العدد الكلي للمربعات على هذه الرقعة بدون دهشة هو مجموع المربعات:

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204.$$

هذه الحجة، طبعا وبالمثل، ستحل المسألة لأي رقعة بأي أبعاد، وعلى أية حال إذا حصلنا على صيغة لجمع المربعات كما حدث مع جمع الأعداد

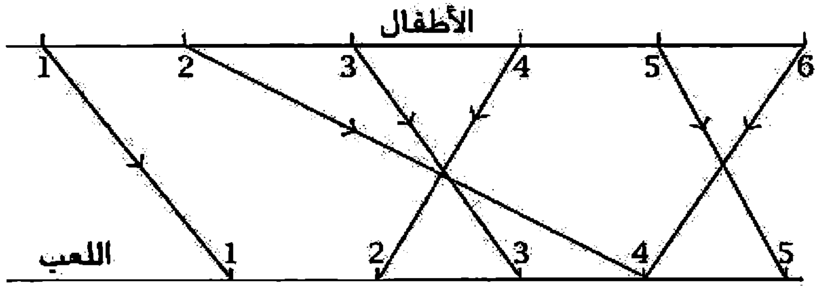


شكل ٣

الصحيحة فسيكون جيدًا (الفصل الأول مسألة رقم ٧)، وستجد صيغة في الفصل القادم.

قبل عرض السؤال التالي سوف أقدم هذا التمهيد: إذا كان لدينا 6 أطفال و5 لعبات — لدينا إذن مشكلة — على الأقل يجب أن يشترك طفلان في لعبة. هذا مثال على مبدأ مهم جدًّا في الرياضيات يعرف باسم «عش الحمام» أو مبدأ صندوق البريد، وهذا المبدأ ينص على «إذا كان لدينا خطابات عددها n يجب وضعها في عدد m من الصناديق وكانت $n > m$ (أي أن n أكبر من m) فإن صندوقًا واحدًا على الأقل يجب أن يحتوي على خطابين أو أكثر.» بتطبيق ذلك على حقلنا من الأطفال، فيجب اعتبار اللُّعب وكأنها صناديق البريد وأن الأطفال هم الخطابات، الصعوبة أن $5 < 6$ وبالتالي فأحد اللعب سيتقاسمها طفلان (شكل ٤):

هذه الفكرة يمكن استخدامها لإثبات — لا يدع مجالًا للشك — الأشياء التي تظهر للوهلة الأولى بعيدة عن الوضوح؛ إذا كانت مدينة بها 400



شكل ٤

ساكن، فإنه يوجد ساكنان على الأقل لهما نفس تاريخ الميلاد؛ لأن عدد السكان يزيد عن عدد أيام الميلاد، وفي لندن هناك شخصان على الأقل لهما نفس العدد من الشعرات على رءوسهم لنفس السبب؛ ففي لندن يوجد أكثر من 7000000 ساكن، لكن عدد شعرات رأس أي فرد لا تزيد عن 25,0000 (عدد الشعرات ليس معروفًا بالضبط، لكن هذه الفكرة صحيحة بدرجة كبيرة، وإذا كان المطلوب أن يزيد العدد إلى عدة ملايين فإن مبدأ عش الحمام لا يزال يعطي نفس النتيجة). في الواقع يمكننا أن نقول أكثر من ذلك: يجب أن يكون في العاصمة على الأقل $6\frac{3}{4}$ مليون شخص لهم على الأقل شخص آخر في المدينة بنفس عدد الشعرات على الرأس، السبب في هذا أن عدد الناس في لندن — إذا كانت هذه المقولة خاطئة — ينبغي ألا يزيد عن 25,0000. وبهذا يظهر هذا المبدأ شيئًا من الدقة، وسوف نستخدم الفكرة وراء ذلك لمعالجة مشكلتنا التالية.

٧- في أي حفلة هل يوجد شخصان دائمًا لهما نفس العدد من الأصدقاء الحاضرين الحفل؟

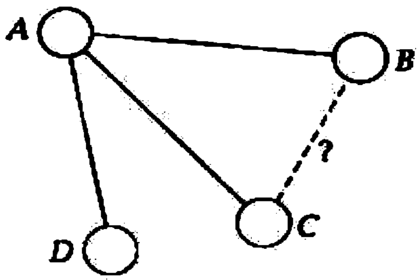
نعم، ذلك صحيح، ليكن عدد الناس في الحفل n (طبعا $n \geq 2$ لأنه على الأقل يوجد اثنان في الحفلة) أكبر عدد من الأصدقاء لأي شخص في هذا الحفل هو $n-1$، مثلا، المضيف على علاقة جيدة مع كل الضيوف وأقل عدد هو صفر (هذا يبدو سيئًا لكن من الممكن أن يكون هناك متطفل

على الحفل). لنفترض العكس، أي أنه لا يوجد شخصان في الحفل لهما نفس العدد من الأصدقاء، لكل حاضر الحفل ترفق عدد نطلق عليه «عدد الصديق»، وهو يقع بين صفر، $n-1$ ضمنيًا، ونفترض أن جميع هذه الأعداد مختلفة عن بعضها. ليس هذا سهلًا لكنه ممكن؛ يوجد أعداد مختلفة قدرها n توزع بين n من الأفراد، وهذا يعني أن كلًّا من هذه الأعداد $0, 1, 2, \ldots, n-1$ يستعمل بالضبط مرة واحدة. توجد دورة أخيرة تجعل هذا الأمر مستحيلًا؛ نفرض أن شخصًا ما P (في الحفل) عدد أصدقائه صفر (لا يوجد أصدقاء) وشخصًا آخر (في الحفل أيضًا) Q عدد أصدقائه هو $n-1$، هذا يعني أن Q يعتبر كل فرد في الحفل، بما فيهم P، صديقه. على أية حال إذا كان P وQ أصدقاء فإن P لا يمكن أن يحصل على رصيد صفر من الأصدقاء، وبذلك نكون قد وصلنا إلى النتيجة أن الفرض بعدم وجود شخصين لهما نفس العدد من الأصدقاء يؤدي إلى تعارض، وبالتالي فإن هذا الفرض خاطئ. البديل الوحيد هو أن هناك مدعوَّيْن في الحفل لهما عدد متساوٍ من الأصدقاء، ويجب أن تكون كذلك لكل حفل وجد في السابق أو في المستقبل أو في أي وقت.

نستمر مع مسألة الحفل الثانية.

٨- في أي حفلة من ستة أفراد أو أكثر، هل بالضرورة هناك ثلاثة يعرف بعضهم بعضًا أو ثلاثة غرباء؟

الإجابة نعم والحجة التي سأقدمها هنا لإقامة هذا البرهان بسيطة ولكنها حساسة جدًّا، وتكمن الصعوبة في: فيما يتعلق بالستة أشخاص هناك العديد من الترتيبات الممكنة لشكل المعرفة بينهم؛ حجتنا قد تكون قادرة على التعامل معهم جميعا، وإذا انحرفنا عنها في الطريق الخاطئ فإننا سنضيع في العديد من الحالات، مرة أخرى، إنها مسألة وضع إصبعنا على المفتاح الرئيسي للمشكلة (شكل ٥):



شكل ٥

لنأخذ أي ستة أفراد في حفل ونركز على واحد منهم يسمى A (شكل ٥)، أما الخمسة الآخرون فإن A يعرف على الأقل ثلاثة منهم أو إذا لم يكن يعرف فإن ثلاثة منهم لا يعرفهم. (هذا هو المكان الوحيد حيث نستغل فيه حقيقة وجود ستة أفراد). لنفترض للحظة أن ثلاثة من هؤلاء معروفون لـ A، وبالتالي إما أن يكون هؤلاء الأشخاص غرباء عن بعضهم، وفي هذه الحالة وُجد المثلث المطلوب من ثلاثة لا يعرف أحدهم الآخر، أو على الأقل اثنان منهم B، C مثلًا يعرف أحدهم الآخر، وبالتالي يجب أن نلاحظ فقط أن ثلاثة أفراد A، B، C يشكلون مثلثًا من المعرفة المتبادلة. في الحالة البديلة حيث يوجد ثلاثة أشخاص لا يعرفهم A، فإن الحجة هي نفسها، أنت تحتاج فقط إلى تطبيقها مرة أخرى عن طريق مبادلة «المعرفة المتبادلة» و«الغرباء بالتبادل»، نستنتج أنه من المستحيل تجنب ثلاثي المعرفة المتبادلة أو الغرباء بالتبادل عندما يجتمع معًا ستة أفراد أو أكثر.

نحن نحتاج حقًّا لستة الأفراد على الأقل لاستخدام هذه الحجة. لرؤية ذلك، تصور حفلة من خمسة أفراد يجلسون حول مائدة عشاء، وافرض أن كل فرد يعرف الجالسين بجواره فقط وليس كل الأفراد، في هذه الحفلة لا توجد مجموعة من ثلاثة يعرف بعضهم بعضًا وأيضًا لا يوجد ثلاثي لا يعرف أحدهم الآخر كما يمكن رؤيته برسم صورة مناسبة لذلك.

بعض المسائل التي ذكرناها يمكن تعميمها بسهولة لعدد أكبر، لكن هذه المسألة لا تعمم. لرؤية ما أريد قوله، نأخذ نفس المسألة لكن السؤال هو: ما عدد الموجودين بالحفل حتى نتأكد من وجود مجموعة من أربعة

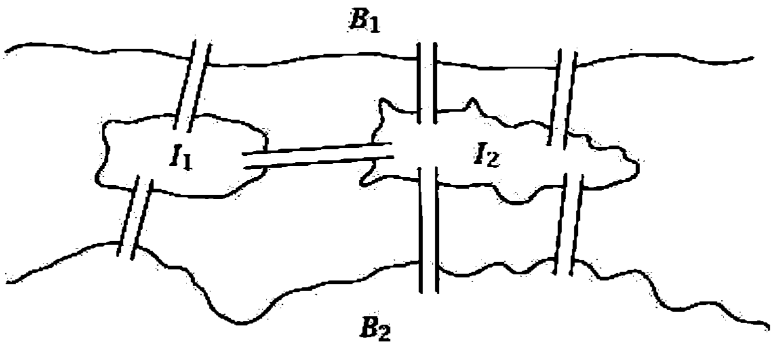
أفراد يعرف بعضهم بعضًا بالتبادل أو أربعة غرباء عن بعضهم تماما، ستجد أنه من الصعب تعميم النهج الذي اتبعناه سابقًا، ويمكن أن يساورك الشك أنه لا توجد إجابة للسؤال، على كل حال يمكنك الاعتقاد بأنه مادامت الحفلة كبيرة فيمكن ترتيب الأشياء حتى لا يظهر أبدًا أي نوع من الرباعيات المطلوبة. الأمر ليس كذلك وقد أثبته عالم الرياضيات الإنجليزي رامزي (F. P. Ramsey) عام ١٩٣٠. نظرية رامزي هي نتيجة عبقرية مفيدة في رياضيات التوافيق التي تؤكد، أنه إذا أعطيت أي عدد m، في مجموعة كبيرة كُبرًا كافيًا من الناس (أصغر عدد n يعتمد على m) توجد زمرة من m من الأفراد الذين يعرف بعضهم بعضًا أو هم غرباء بالتبادل، على سبيل المثال أنت في حاجة لعدد 18 شخصًا لتؤكد وجود زمرة الأربعة — ونحن نقول إن عدد رامزي الرابع هو 18، ولا أحد يعرف قيمة العدد الخامس أو أي عدد ناجح لرامزي لكنها موجودة وقد أثبتها رامزي.

مشكلتنا التاسعة تتعلق بموضوع سنتناوله في الفصل الأخير (أي موضوع الشبكات)، وهي مسألة تقليدية تعرف باسم جسور كونيجزبرج konigsberg bridges — مدينة بروسيا القديمة كونيجزبرج تقع على جانبي نهر يسمى برجل (Pregel) ويربط الجانبين سبعة جسور تربط الشاطئين وكذلك جزيرتين في وسط النهر. (الشكل ٦) والسؤال هو:

٩- هل يمكن للمرء أن يعبر كل جسور المدينة مرة واحدة فقط؟

المواطنون الذين لم يصلوا إلى إجابة لهذا السؤال طلبوا عون عَالِم الرياضيات أويلر وقد شرح لماذا لا يمكن القيام بذلك، ومع سهولة المسألة فقد كانت الأولى في نظرية الشبكات، وبالتالي تحتاج لنهج جديد، وحتى ذلك الوقت لم تكن هذه إحدى مسائل الرياضيات.

فيما يتعلق بشبكة الجسور توجد أربعة أماكن فقط يمكن أن يبدأ المشي منها وهي الحروف:

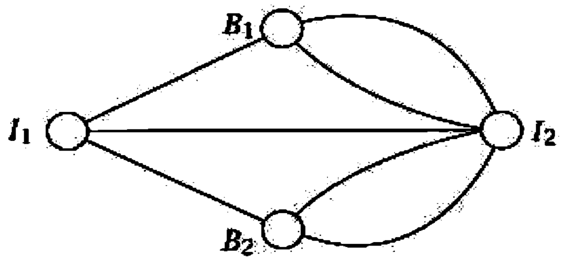


شكل ٦

كما في الشكل ٦. التبسيط الأول للنظر إلى المسألة هو تمثيل الأماكن الأربعة (ضفتي النهر والجزيرتين) كعُقَد أو نقط في شكل توضيحي، لكل جسر طبيعي نرسم خطًّا بين العُقدتين لنحصل على (الشكل ٧) هذا الشكل التوضيحي بسيط ويحتوي كل المعلومات المطلوبة للمسألة.

لنفرض أن هناك بعض المتنزهين استطاعوا عبور كل الجسور مرة واحدة، سوف تبدأ الرحلة عند عُقدة وتنتهي عند عُقدة (ربما تكون نفس عُقدة البداية)، لكن سيوجد على الأقل عُقدتان لن يكونا نقطتا البداية أو النهاية في النزهة. لتكن X هي إحدى هاتين العُقدتين، إننا سوف نزور X عددًا من المرات ونترك X عددًا مساويًا من المرات، وهذا سوف يجعلنا نستخدم عددًا زوجيًا من الجسور؛ كل مرة تصل X ثم تغادرها تستخدم عددًا زوجيًا من الجسور التي لن يُسْمَح بعبورها ثانية، وبالتالي فإن X يجب أن تتصل بعدد زوجي من الجسور، سوء الحظ هذا ليس صحيحًا لأي من العُقَد (شكل ٧). I_2 تتصل بخمس جسور وكل من العُقَد الأخرى تتصل بثلاث جسور لكل منها، وهذا يؤدي أنه لا توجد نزهة لها الخصائص التي نبحث عنها.

هذا النوع من المسائل أصبح مألوفًا ومعروفًا شعبيًا كلُغز: ارسم شكلًا دون أن تمر على نفس الخط مرتين (أي الجسر لا يُعْبَر مرتين) ودون أن ترفع القلم عن الصفحة (لا تقفز). سوف نحل هذه المشكلة تمامًا في (الفصل ١٠) مع تشكيلة من التطبيقات الجديدة المختلفة، في المقابل



شكل ٧

مسألتنا التالية قديمة جدًّا في الواقع وتُنْسب إلى العَالِم هيرون (هيرو) الإسكندراني حوالي عام ٧٥:

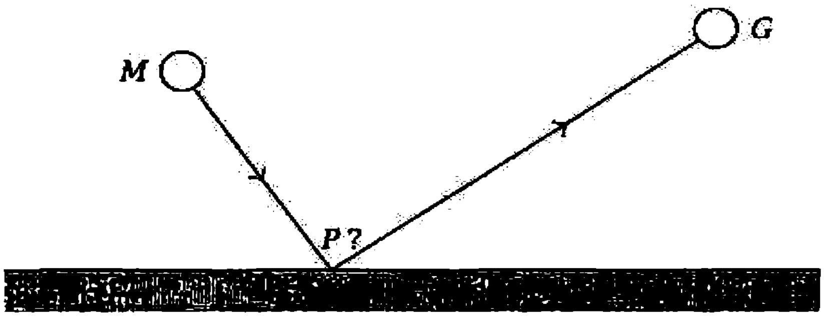
ماري تعيش في M وترغب في زيارة جدتها في G بعد أن تشرب من النهر كما هو واضح في (شكل ٨):

١٠- ما أقصر طريق تأخذه ماري في رحلتها؟

لأن أقصر مسافة بين نقطتين هي خط مستقيم فإن طريق ماري سيكون من خطين متصلين، الأول من M إلى نقطة ما P على النهر والثاني من P إلى G (شكل ٨)، السؤال الوحيد المتبقي هو: كيف تختار ماري النقطة P؟

هذا السؤال قد يكون محيرًا حتى نرى أنه سؤال حقيقي عن الانعكاس، لننظر إلى السؤال من هذا المنطلق؛ لنفرض أن ماري لها أخت توءم اسمها ماريا تعيش معها وترغب في زيارة جدتها التوءم التي تعيش عند G' المعاكسة تمامًا على الضفة الأخرى للنهر، تمامًا نفس المسافة من ضفة النهر مثل G. الأختان يسافران معًا لنقطة متفق عليها P على النهر، يشربان معًا من النهر ثم يتفرقان ماري إلى G وماريا إلى G' (ماريا عليها عبور النهر لكن هذا لا يغير من حل المسألة).

حيث إن G' تقع على انعكاس G بالنسبة للخط الذي تصنعه ضفة النهر، المسافتان PG وPG' متساويتان لأن PG' هي انعكاس PG، وبالتالي يمكننا تقصير نزهة ماري إذا قصرنا من طول رحلة ماريا، وهذا بسيط،



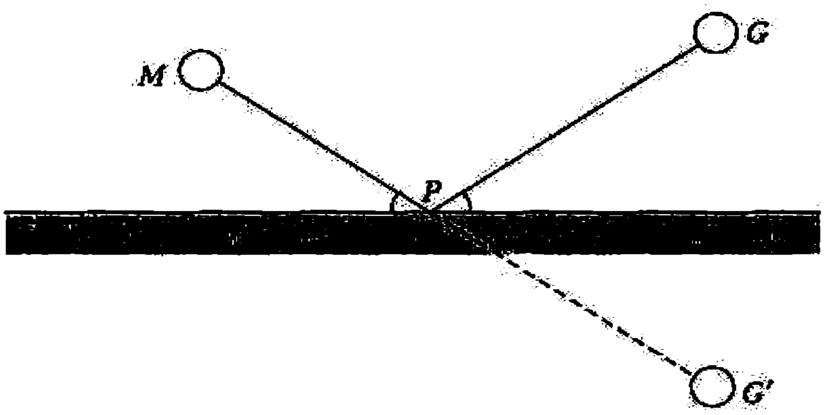
شكل ٨

لأن ماريا لتقصير نزهتها عليها أن تسافر في خط مستقيم من M إلى G'، وبالتالي حصولنا على أحسن موقع للنقطة P: وهي تقاطع خط ضفة النهر مع الخط الواصل من M إلى G' حيث G' هي انعكاس G، بالنسبة لخط ضفة النهر.

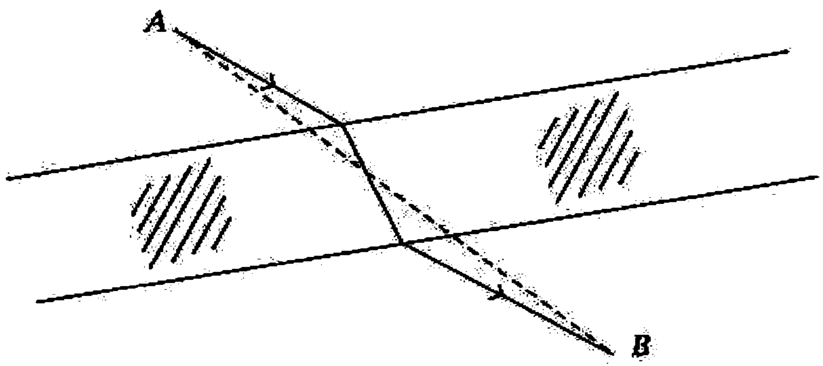
توجد حقيقة موضوعية تتعلق بهذه المسألة الجميلة وسلوك شعاع الضوء؛ حزمة ضوئية أرسلت من M وتصطدم بمرآة وضعت عند P حيث وجهها على خط ضفة النهر سوف تنعكس إلى G لأنها، كما نرى في (الشكل ٩)، أن P وضعت بحيث تكون الزاوية التي تصنعها ضفة النهر مع MP تساوي التي تصنعها مع PG. هذا يوضح الكفاءة الطبيعية للضوء وكما نرى فإن الحزمة الضوئية تأخذ أقل وقت ممكن لتصل من M إلى G خلال ضفة النهر.

هذا هو مبدأ فرمات (Fermat's) لأقل زمن، الذي ينطبق أيضًا على مسار الضوء خلال الأوساط العاكسة المختلفة كما هو موضح في (الشكل ١٠).

شعاع الضوء لا يسير تبعًا لأقصر مسار من A إلى B ولكن تبعًا للمسار الذي يحتاج أقل زمن: الخط المستقيم من A إلى B يحتوي الشعاع المار خلال الوسط الأكثر كثافة، الزجاج، حيث سرعته أقل، وبالتالي شعاع الضوء خلال هذا الممر (إذا كان ممكن ماديًا) من شأنه أن يستغرق وقتًا أطول للوصول إلى B من وقت المسار الموضح. من مبدأ فرمات (Fermat)



شكل ٩



شكل ١٠

الفرد يمكن استنتاج قانون سنل (Snell) الذي يختص بنسب جيوب زوايا السقوط والانكسار للشعاع المار بين وسطين شفافين.

الفكرة الكامنة وراء هذه المسألة تعود للظهور في القرن التاسع عشر فيما لا يبدو أن له صلة بالموضوع؛ أن إيجاد فرص فوز مرشح في انتخابات يمكن أن يؤدي على طول الطريق إلى طرق العد، سوف نرى كيف يحل هذا النوع من الأسئلة باستخدام مبدأ الانعكاس في (الفصل ٨).

المسألة الآتية يمكن أخذها في الحسبان بنظرة مماثلة: نملة على السطح الخارجي لأسطوانة زجاجية ارتفاعها 4 بوصات ومحيطها 6 بوصات، في

داخل الزجاج على بعد بوصة واحدة من أعلى نقطة توجد قطرة من عسل النحل، النملة على السطح المعاكس لقطرة العسل وعلى بعد بوصة واحدة من قاع الأسطوانة.

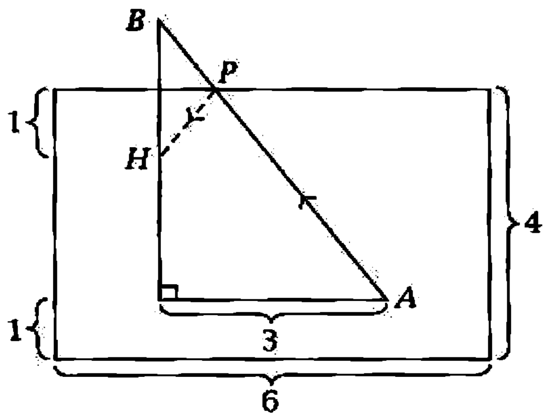
١١- كم تبعد النملة عن قطرة العسل؟

السؤال سيكون أسهل جدًا إذا تناولناه متصورين أن الأسطوانة قد قطعت لتصبح مستطيلًا (رمي في القاع) النملة تبدأ عند A ويجب أن تمشي على السطح الخارجي للزجاج إلى نقطة P ثم إلى أسفل حتى النقطة H حيث نقطة العسل (شكل ١١).

يمكننا أن نرى الآن أن هذه ليست إلا صورة أخرى من مسألة هيرون، حيث النقطة A تقابل النقطة الأصلية M والنقطة H تقابل G، والسؤال هو تعيين النقطة غير المعروفة P على حافة الزجاج.

مرة أخرى نستخدم مبدأ الانعكاس: B تقابل G' وبالتالي فإن P هي نقطة تقاطع الخط من A إلى B مع الحافة العليا للزجاج. طول أقصر مسار APH يكون مساويًا AB ومن نظرية فيثاغورث نجد أن: $AB^2 = 4^2 + 3^2$ أي أن الطول AB يساوي 5 بوصات.

لا ينبغي أن تخجل أبدًا من أن تسأل عن حجة مشكوك فيها مثل هذه مع أنها صحيحة، إنها تحتوي على وثبة في التفكير وينبغي أن نلاحظ هذا، إننا لم نجب عن سؤال الأسطوانة لكن أجبنا السؤال عن المستطيل الناتج من قص الأسطوانة، هل هذا يغير المسألة؟ مؤكد إذا حاولنا التعامل مع مسألة مماثلة عن الكرة بتسطيحها فإن الانحرافات الناتجة ستؤدي إلى إجابة خاطئة، ما هو جيد عن الأسطوانة أن الإحساس الرياضي الدقيق أنها ليست منحنية في الحقيقة وبالتالي فإن فلطحة السطح المنحني للأسطوانة لا يسبب أي تشويه، بالأخص أن طول أي ممر على الأسطوانة لن يتغير بعد فلطحتها، تخيل نفسك كقطعة من الخيط على سطح أسطوانة حيث عُقِدت دون شد، عند فتح الأسطوانة فإن شكلك يتحول من منحنى إلى



شكل ١١

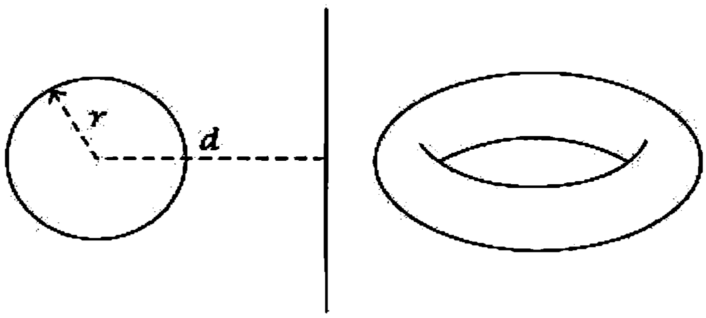
خط مستقيم لكن بنفس الطول، ولن يتم شدك ولن تكون مرنًا، هذا هو السبب في أن المسألتين متكافئتان وأن حل الثانية يعني حل الأولى.

إذا كنت مستعدًّا أن تعتقد أننا يمكننا أن نفعل هذا النوع من الأشياء فإنه يمكننا حل مسائل أكثر تعقيدًا كالآتي.

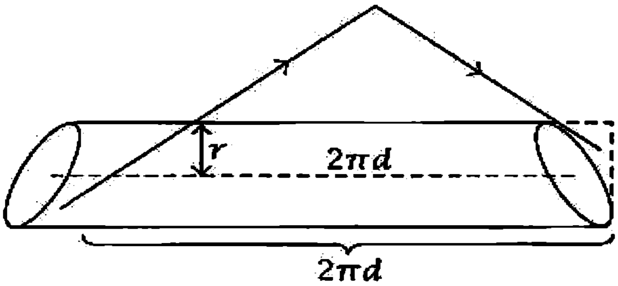
١٢- ما حجم كعكة الدونات؟

الاسم الرياضي الصحيح لشكل الدونات هو الطارة (torus) وقد عُرِفَ أيضًا باسم حلقة المرساة مدة قرن (شكل ١٢(أ)) وهو الشكل الناتج من دوران دائرة حول خط (محور) في مستوى الدائرة ولا يقابل الدائرة، لتكن r هي نصف قطر الدائرة، d هي المسافة من مركز الدائرة حتى المحور (كما في شكل ١٢(ب)).

هذه الطارة واحدة من الأجسام الرياضية الأساسية في الكون، هذه ليست واضحة على الإطلاق وأنا أقول هذا جزئيًّا على سبيل التحذير. كثير من كتب الرياضيات وعلى الأخص في مواضيع التوبولوجي ستجعلك تناضل لمعرفة إذا كانت أشياء معينة يمكن أن تنقذ على سطح الطارة — أو لا



شكل ١٢



شكل ١٣

يمكن — التي تبدو وكأنه طريقة محافظة لقضاء فترة بعد ظهر يوم الأحد بما هو أكثر إمتاعا، ومع ذلك فإن هذه الأسئلة ذات شأن، ولن أقوم بالكثير لبرهنة ذلك هنا، بدلًا من ذلك لنجد حجم الدونات:

المبدأ أن نقسم الدونات إلى شرائح دائرية ونركبها معًا لنكون أسطوانة مبتورة عند النهايتين (شكل ١٣). يمكننا إعاده تشكيل الأسطوانة وكأننا قطعنا نصف الأسطوانة عند أحد الأطراف وإدارتها ووضعها عند الطرف الآخر وذلك لتكملة الجزء الناقص. حجم الأسطوانة هي مساحة القاعدة مضروبًا في الارتفاع. في هذه الحالة يعني أننا أعدنا تشكيل الطارة إلى أسطوانة نصف قطرها r، نصف قطر الشريحة الدائرية من الطارة، وارتفاعها هو طول محيط الدائرة التي نصف قطرها d ويساوي $2\pi d$،

وبالتالي فإن الحجم V للطارة هو $(\pi r^2)(2\pi d)$ أي أن:

$$V = 2\pi^2 d r^2.$$

بطريقة مماثلة، المساحة السطحية للطارة تساوي المساحة السطحية للأسطوانة. تقسيم الأسطوانة إلى شرائح وفتحها موازية لمحورها وفلطحتها، تكوّن مستطيلًا ارتفاعه مثل ارتفاع الأسطوانة وعرضه هو محيط قاعدتها. مساحة هذا المستطيل، وبالتالي مساحة سطح الطارة S هي $(2\pi d)(2\pi r)$ أي:

$$S = 4\pi^2 d r.$$

الفصل السابع

المتسلسلات

بعض أمثلة للمتسلسلات

بعض من أبسط المسائل التي تقابلها في البداية في الرياضيات تنطوي على اكتشاف الأنماط في متتابعة من الأعداد، وهذا بالطبع يؤدي إلى أسئلة عن المتسلسلات، مجموع متتابعة الأعداد، وسرعان ما يجد المرء نفسه في المياه العميقة وربما دون أن يدرك ذلك. هذا الكتاب لا يشتمل على مقرر في هذه الأمور وعلى أية حال في هذا الفصل أنا مع وصف المحتوى وليس إثبات النتائج عن المتسلسلات، حيث المتسلسلة لا تفعل إلا الاستسلام لتلاعب بسيط وقصير، وتقدم الشرح التام.

على مدى القرون السابقة القليلة هناك مقدار مذهل من الجهد والإبداع العبقري استُثمر في المشاكل التي تحتوي على مجموع متسلسلة من الأعداد. بالطبع يمكننا دائمًا جمع أي مجموعة معينة من الأعداد؛ ما أشير إليه هنا هو مسألة المتسلسلات اللانهائية مثل:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1, \qquad (1)$$

أو مسائل عن المتسلسلات المحدودة مثل مسألة رقعة الشطرنج في الفصل السابق، حيث نسأل عن صيغة لعدد n من الحدود من نوع معين، في تلك المسألة المطلوب مجموع المربعات

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \qquad (2)$$

في حين أن بعض المتسلسلات تروض فقط باستخدام آليات رياضية معُقدة، وبعضها الآخر متاح للجبر البسيط، بما فيها المثالان السابقان، التي سنتناولها في وقت لاحق.

يوجد بعض التوضيح فيما يخص المتسلسلة اللانهائية لأننا لا يمكننا الادعاء بجمع المتسلسلة اللانهائية من الأعداد في (1) بنفس طريقة جمع المتسلسلة المحدودة مثل (2). نترك ذلك جانبًا للحظة، أود أن أبدأ مع قائمة من الأمثلة لشرح كيف أن المتسلسلات المتماثلة ظاهريًا يمكن أن تتصرف بشكل مختلف تمامًا. في الوقت الحالي سأترك لك أيها القارئ الحصول على نمط الحدود في كل من المتسلسلات التالية، والمزيد من التفاصيل سيكشف بعد قليل.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\infty \qquad (3)$$

$$4-\frac{4}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{27}+\frac{4}{81}-\cdots=3 \qquad (4)$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2=0.6931\ldots \qquad (5)$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}=0.7854\ldots \qquad (6)$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=1.645\ldots \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=1 \qquad (8)$$

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}+\cdots=? \qquad (9)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\frac{1}{720}-\cdots=\frac{1}{e}=0.3679\ldots \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\cdots=2 \qquad (11)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots=\infty \qquad (12)$$

المتسلسلة (3) الحد النوني هنا هو $\frac{1}{n}$ وتعرف باسم المتسلسلة التوافقية. ما الذي نعنيه بقولنا إن المجموع لا نهائي؟ لنبدأ الشرح بمثال بسيط: متسلسلة مثل:

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

من الواضح أنها تتباعد إلى اللانهائية، بمعنى أنه كلما جمعنا حدود أكثر من المتسلسلة فإن المجموع يزيد متجاوزًا كل الحدود؛ في هذه الحالة مجموع n من الحدود الأولى هو n. لقد رأينا أن هذا لا يحدث دائمًا في الواقع، مادام حدود المتسلسلة تقترب من الصفر، المجموع المأخوذ من متسلسلة لا نهائية من الأعداد الموجبة قد يقترب من نهاية: للحظة لننظر إلى مثالنا (1) كلما جمعنا أكثر وأكثر من الأعداد من هذه المتسلسلة فإن المجموع يقترب أكثر من القيمة النهائية «1». ثم إننا نرى أن السؤال عن متسلسلة لا نهائية — تتقارب إلى حد ما — تنشأ فقط إذا كانت حدود المتسلسلة تقترب من الصفر. الآن (3) تستوفي هذا المعيار: بزيادة العدد n — فإن الحدود $\frac{1}{n}$ تذهب بخطى متزايدة السرعة لتصل إلى الصفر ويبدو أنه توجد فرصة أن يقترب مجموع الحدود من قيمة نهائية مثلما حدث في (1). لكن ليس هذا هو الحال: المتسلسلة تتباعد إلى ما لا نهاية، يعني أنه لأي عدد سواء 10 أو 10 مليون، فإن هذا العدد سيجري تجاوزه إذا جمعنا حدودًا كافية من المتسلسلة. هذا أمر غير واضح مع أنني سوف أثبت بعد قليل أنه صحيح. عدد الحدود المطلوب ليزيد عن 10 سيكون أكثر من 20,000 وعدد الحدود ليزيد عن 10 مليون لا نستطيع التفكير فيه.

ما الفرق بين المتسلسلة (1)، والمتسلسلة (3) الذي قد يحسب للتفاوت بين سلوكهما؟ الفرق المهم يقع في حقيقة أن الحدود في المتسلسلة الأولى $\frac{1}{2^n}$ تتقارب إلى الصفر أسرع كثيرًا من الحدود $\frac{1}{n}$. إذا كانت n كبيرة فإن الحدين بالطبع صغار جدًا. لكن الحد النوني في الأخيرة لا يزال أكبر وأكبر مرات كثيرة عن الحد النوني في المتسلسلة الأولى. مثلًا إذا كانت

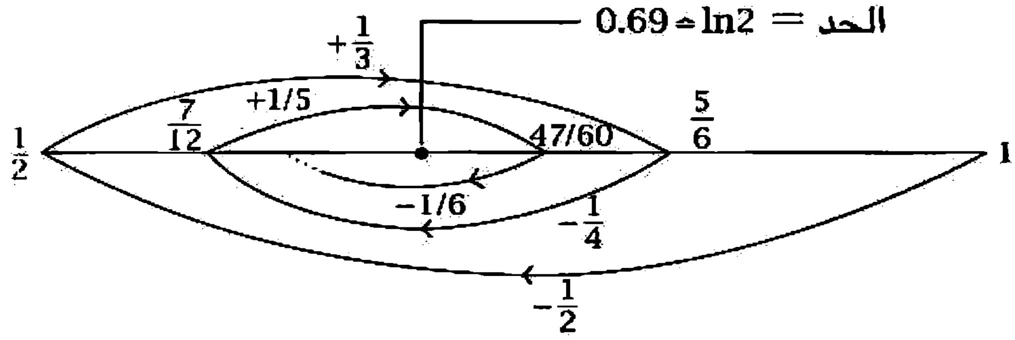
$n = 16 = 2^4$ (اختيار 16 فقط لأنه يمكن كتابتها كقوى للعدد 2 وبالتالي الحسابات بسيطة):

$$\frac{1}{16} \div \frac{1}{2^{16}} = \frac{2^{16}}{2^4} = 2^{12} = 4096,$$

وبالتالي لقيمة $n = 16$، فإن $\frac{1}{n}$ أكبر آلاف المرات من $\frac{1}{2^n}$.

المتسلسلة (4) هي مثال لمتسلسلة هندسية (لا نهائية) وهي في الحقيقة مماثلة للمتسلسلة (1). للمرور من حد إلى الحد التالي نضرب في عدد ثابت، النسبة المشتركة وهي $-\frac{1}{3}$ في هذه الحالة. الحد النوني هو $4(-\frac{1}{3})^{n-1}$، بالمثل الحد العام في (1) هو $(\frac{1}{2})^n$ حيث النسبة المشتركة هي $\frac{1}{2}$. المتسلسلات الهندسية سهلة التناول وهامة سواء بحد ذاتها أو بوصفها أدوات لمعالجة أسئلة متسلسلات أكثر صعوبة. سوف نرى كيف نجمع متسلسلة هندسية في وقت لاحق.

المتسلسلة (5) هي متسلسلة توافقية بإشارات متبادلة من السهل جدًّا الاقتناع أن هذه المتسلسلة تقاربية، بمعنى أن المجاميع المتعاقبة تصبح أقرب وأقرب إلى نهاية ما. إذا ما علمنا بعض المجموعات المتعاقبة من هذه المتسلسلة على خط الأعداد، كما في شكل ١، فإنه يصبح واضحًا تمامًا ماذا حدث؛ المجاميع المتتالية للمتسلسلة تقفز على جانبي القيمة النهائية، القفزات تصبح أصغر وأصغر عند كل خطوة. هذه الملاحظة تستخدم لأي متسلسلة من هذا النوع: إذا كانت المتسلسلة متبادلة الإشارة وكانت القيمة المطلقة لكل حد أصغر من الحد الذي سبقه، فإن المتسلسلة تتقارب. في الواقع يمكن أن نقول أكثر قليلًا: إذا جمعنا الحدود الـ n الأولى من هذه المتسلسلة، فإن الفرق بين هذا المجموع ومجموع المتسلسلة كلها ليس أكثر من الحد t_{n+1}، الحد التالي في المتسلسلة. في هذا المثال، لحظيًّا، مجموع



شكل ١

الحدود الخمسة الأولى هو:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}=0.78\dot{3},$$

وهو يزيد عن القيمة النهائية بمقدار ...0.0901 وهو أقل من $\frac{1}{6}$ الحد التالي في المجموع. مرة أخرى اختبار شكل ١ يجب أن يقنعك بصحة هذه الملاحظة: عند أي مرحلة في المجموع، الحد التالي يدفعك لتعدي حد النهاية، وهو يوضح أن مجموع الحدود النونية الأولى للمتسلسلة أقرب إلى حد النهاية من حجم t_{n+1}.

هذا لا يساعدنا على أية حال في إيجاد القيمة الدقيقة لمجموع المتسلسلة (5) وهي $\ln 2$ (الرمز ln يعني اللوغاريتم الطبيعي الذي يستخدم الأساس $e = 2.7183\ldots$). من الواضح أن هذه بندقة أصعب في التكسير، بعد كل ذلك من أين أتى اللوغاريتم؟ هذه النتيجة ليست بسيطة وتقع خارج نطاق هذا الكتاب. هناك حاجة لبعض من حسابات التفاضل والتكامل لهذا العمل.

المتسلسلة (6) مرة أخرى لدينا متسلسلة متبادلة الإشارة لحدود دائمة النقصان ولهذا، كما في المثال الأخير، المتسلسلة تتقارب إلى نهاية، لكن مرة أخرى القيمة النهائية، $\frac{\pi}{4}$، مثل «أرنب يخرج من القبعة» من أين أتى المقدار π؟ مرة أخرى هذه نتيجة تحصل عليها من خلال استخدام التفاضل والتكامل.

المتسلسلة (7) هنا نجمع مقلوبات مربع الأعداد أي أن الحد العام هو $\frac{1}{n^2}$. لأن المتسلسلة التوافقية (3) لا تتقارب إلى قيمة نهائية، فقد تندهش من أن هذه المتسلسلة تتقارب. على أية حال الحد النوني لهذه المتسلسلة هو $\frac{1}{n^2}$ هو أصغر بـ n من المرات من الحد النوني للمتسلسلة التوافقية $\frac{1}{n}$، ويبدو أن هذا كافٍ لدفعها للتقارب. هذا غير واضح وبالطبع يحتاج لبعض العمل. في هذه اللحظة الحجة ليست بعيدة عنا لكنها تحوي حيلة صغيرة سوف تراها في وقت لاحق. القيمة النهائية الغامضة $\frac{\pi^2}{6}$، سوف تبقى بعيدة المنال. الطريقة المعتادة للحصول على هذه النتيجة هي باستخدام تقنية ما تعرف باسم متسلسلة فورييه، وتكتسب أهمية خاصة في دراسة الموجات والحركات الدورية.

المتسلسلة (8) هل وجدت النمط هنا؟ الحد النوني في هذه الحالة هو $\frac{1}{n(n+1)}$. هذا يبدو تقريبًا مثل الحالة (7) في الحقيقة سوف نرى كيف نستخدم التقارب في (8) لتحقيق التقارب في (7). لحسن الحظ هناك خدعة جبرية بسيطة توضح أن المجموع في (8) يساوي الواحد، كما سنرى في وقت لاحق.

المتسلسلة (9) وهي متسلسلة عنيدة مما لا شك فيه؛ فهي ببساطة مجموع مقلوب مكعبات الأعداد ولهذا فهي شبيهة جدًّا بالمتسلسلة (7). ومؤكد ليس من الصعب أن نثبت أن المتسلسلة تتقارب إلى نهاية ما، ويمكن حساب هذه النهاية إلى أي عدد من الأماكن العشرية. ما ينقصنا، على أية حال، صيغة للمجموع بدلالة أعداد أخرى مثل الطريقة في مثال (5)، (6)، (7). في الواقع، طابع هذه النهاية كان غير معروف حتى السنوات الأخيرة عندما أثبت الرياضي الفرنسي (Apery) أنه غير قياسي. أما مجموع معكوسات القوى الخامسة وما بعدها للأعداد الفردية فلم يحدد بعد. في المقابل من المعروف، من زمن، فإن معكوسات القوى الزوجية للأعداد الموجبة يمكن التعبير عنها مضاعف قياسي للعدد π، (المجموع (7) كمثال) وبالتالي فهو غير قياسي.

المتسلسلة (10) هي متسلسلة أخرى متبادلة الإشارة، الحد النوني لها هو $\frac{1}{(n+1)!}$ مضروبًا في ± 1 في حالة n فردي أم زوجي. هذه المتسلسلة تتقارب بسرعة كبيرة — الفرق بين مجموع n من الحدود الأولى والنهاية دائمًا أقل من الحد التالي $\frac{1}{(n+2)!}$. فمثلًا، قارن مجموع الثماني حدود الأولى هو يساوي 0.367888 وقيمة النهاية ...0.367879 الفرق هو القيمة 0.000009.

متسلسلة مثل هذه التي تتقارب بسرعة يمكن أن تكون وسيلة مفيدة في الحسابات العملية. هذه المتسلسلة على الأخص تصبح الحل للمسألة الفضولية التالية: نفرض وجود n من الخطابات المختلفة وأيضًا n من المظاريف. الكاتب المهمل يفكر أن الخطابات هي مجرد كتب دورية متطابقة، فيضع كل خطاب في مظروف عشوائيًا. ما احتمال عدم تطابق أي من الرسائل مع العنوان على المظروف الذي وضعت به؟

هذه المشكلة بفضل أويلر (Euler) يمكن حلها باستخدام ما يعرف بمبدأ الاحتواء — الأبعاد. ونحن لن نذهب أبعد من ذلك ما عدا أن نقول إن الإجابة هي مجموع n من الحدود الأولى للمتسلسلة (10). وكان لهذا نتيجة مفاجئة استغرقت بعض الجهد لتتفق مع الحدس. الحدود الأخيرة من المتسلسلة صغيرة جدًّا وعمليًّا يمكن إهمالها. هذا يعني أنه إذا كانت n عدد الخطابات أكثر من حوالي أربعة فإن الإجابة ستكون تقريبًا نفسها وتقترب من نهاية $0.3679 = \frac{1}{e}$.

وبعبارة أخرى إذا وجد هناك 100 من الخطابات فرصة الخطأ أكبر من 36% أي أن الكاتب الفقير وضعهم جميعًا خطأ، وهو لا شك يظن نفسه ملعونًا بحظ سيئ ليكون الخطأ 100 مرة من 100، لكن للأسف فإن الرياضيات تقف ضده.

المتسلسلة (11) الحد النوني في هذه الحالة $\frac{n}{2^n}$. مرة أخرى قليل من حساب التفاضل والتكامل يتيح لك تعيين هذا المجموع. حساب التفاضل والتكامل ليس مطلوبًا، على أية حال النتيجة يمكن الحصول عليها بإعادة كتابة (11) كمتسلسلة هندسية وجمعها معًا وهذه هي اللحظة حيث النهج

المبدئي ينطوي على عمل أكثر من استخدام تقنيات متطورة. في الرياضيات كلمة مبدئي لا تعني بالضرورة السهولة، إنها تعني فقط أن المسألة حلت دون اللجوء إلى الرياضيات العالية.

المتسلسلة (12) هذه متسلسلة من نوع مختلف، مجموع معكوسات الأعداد الأولية. ولأن هناك عددًا لانهائيًا من الأعداد الأولية كما رأينا في الفصل الرابع، هذا لا يؤدي أن المتسلسلة تتباعد كما في حالة المتسلسلة التوافقية (3). بعد ذلك يوجد عدد لا نهائي من القوى للعدد 2 لكن مجموع المعكوسات لقوى 2 كما وضحنا في (1) له النهاية واحد، ويكفي القول إن الإثبات الطبيعي أن مجموع معكوسات الأعداد الأولية يتباعد قصير جدًا وبدائي، بالرغم من احتوائه على ملاحظة دقيقة، ولن أذكرها هنا.

المتسلسلات المحدودة

في الفصل الأول، السؤال السابع رأينا أن:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1). \qquad (13)$$

منذ ذلك نستطيع أن نجمع حدود أي متتابعة حسابية، وهي المتتابعة التي تبدأ بعدد a والفرق بين الحدود المتتابعة عدد ثابت d:

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)d, \ldots$$

لأن الحد الأول a، والحد الثاني $a + d, \ldots$، وهكذا الحد النوني ونرمز له بالرمز t_n نحصل عليه بإضافة d إلى a عدد $n - 1$ من المرات أي أن: $t_n = a + (n-1)d$.

متسلسلة الأعداد الصحيحة الموجبة هي متسلسلة حسابية حيث $a = d = 1$. نرغب في الحصول على مجموع المتسلسلة الحسابية:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + a + (n-1)d. \qquad (14)$$

يمكننا ذلك بمعلوماتنا عن المجموع (13): المجموع العام أساسًا هو نفسه مع تغيير المقياس (الفرق بين عددين متتاليين ستغير من واحد إلى d) والإزاحة (بدلًا من أن نبدأ عند واحد نبدأ عند أي عدد اختياري a). هذه التغييرات الجبرية البسيطة تواجه بسهولة كالآتي:-

نأخذ جميع as إلى بداية التعبير في (14) لأن هناك عدد n منها فنحصل على:

$$na + d + 2d + \cdots + (n-1)d.$$

بأخذ d عاملًا مشتركًا من الحدود التالية فنحصل على:

$$na + d(1 + 2 + \cdots + n - 1).$$

باستخدام الصيغة (13) التي تعطي مجموع n من الأعداد الأولى للحصول على مجموع $n - 1$ من الأعداد نستبدل n بـ $n - 1$ فيكون المجموع:

$$na + d\left(\frac{1}{2}(n-1)n\right).$$

أي أن:

$$a + (a+d) + \cdots + a + (n-1)d = na + \frac{d}{2}n(n-1).$$

يمكننا تطبيق ذلك لأي متسلسلة حسابية نختارها، فمثلًا مجموع n من الحدود الأولى للأعداد الفردية هي متسلسلة حسابية حيث $a = 1$ والفرق بين أي حدين متاليين هو $d = 2$، أي أن:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) &= n \times 1 + \frac{2}{2}n(n-1) \\ &= n + n(n-1) \\ &= n + n^2 - n = n^2, \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة التي رأيناها هندسيًّا في السؤال ٦ بالفصل الأول.

هناك القليل لإضافته حول جمع المتسلسلة الحسابية، مع أنه تجدر الإشارة إلى أنه لا توجد قيود على الأعداد a، d: فيمكن أن يكون كلاهما موجبًا أو سالبًا أو صفرًا.

السؤال الشائع في اختبارات الذكاء أن تكتب الأعداد الثلاث الآتية لمتتابعة مثل:

$$4, 7, 12, 19, 28, 39, 52, \ldots$$

الشيء الذي نكتشفه هو أن الفرق بين الحدود المتتالية يزيد بمقدار 2 في كل مرة، أي أن:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$$

وبالتالي فإن الإجابة تصبح $67, 84, 103$. المتتابعة نفسها ليست متتابعة حسابية لكن متتابعة الفروق هي متتابعة حسابية.

وفي الواقع فإن متتابعة المربعات

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$$

هي أيضًا من نفس النوع مثل متتابعة الفرق كما رأينا من قبل مرتين، متتابعة حسابية من الأعداد الفردية.

هل يمكننا جمع n من مربعات الأعداد الأولى واستنتاج الصيغة في (2) مثل ما حدث مع المتسلسلة الحسابية؟ ليس على الفور. نحتاج العودة لمسألة جمع الأعداد الصحيحة مرة أخرى وحلها بطريقة أخرى.

لنأخذ المجموع الغريب التالي:

$$(1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \cdots + (n^2 - (n-1)^2).$$

من السهل التبسيط — المجموع يتقارب إلى حد واحد — فيما عدا n^2 قيمة موجبة تحذف بالقيمة السالبة في القوس التالي. وبالتالي المجموع يصبح n^2.

اعلم أنه إذا ادعينا للحظة أننا لم نلاحظ هذا فالحد العام في هذا المجموع هو:

$$(m+1)^2 - m^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 = 2m + 1,$$

حيث m تأخذ القيم من صفر حتى $n-1$، وبالتالي فإن هذا المجموع يمكن كتابته كالآتي:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1,$$

وحجة التقارب السابقة توضح أنه يساوي n^2.

هذه هي المرة الثالثة التي أثبتنا فيها هذه الحقيقة مع أن هذا البرهان يفاجئك بأنه مصطنع. وعلى الأقل سوف يثبت أنه تقنية جديدة ونافعة حيث يمكن تعميمها بطريقة لا يفعلها الآخرون.

يجب أن نكون فضوليين أكثر للسؤال عما يحدث إذا أبدلنا الفرق بين مكعبين بالفرق بين مربعين، هل سنحصل على شيء جديد؟ دعونا نلقِ نظرة على:

$$(1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \cdots + (n^3 - (n-1)^3).$$

مرة أخرى المجموع يتقارب إلى حد واحد، هذه المرة n^3 الحد العام هو $(m+1)^3 - m^3$. كما رأينا في الفصل الخامس يمكن فك وتبسيط هذا:

$$(m+1)^3 - m^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1.$$

بجمع الحد العام $3m^2 + 3m + 1$ من $m = 0$ إلى $m = n - 1$ يعطينا في الحقيقة مجموع ثلاث مجاميع، اثنين منها نعرفهما والثالث هو مجموع المربعات الذي نبحث عنه، وبالتالي مع بعض الجبر البسيط يمكننا اكتشاف صيغة لمجموع المربعات:

$$3(0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2) + 3(0 + 1 + \cdots + n - 1)$$
$$+ (1 + 1 + \cdots + 1) = n^3.$$

نعرف أن مجموع n من الواحد طبعًا n. ومجموع الأعداد الصحيحة من 0 حتى $n-1$ هو $\frac{1}{2}n(n-1)$. وبالتالي نحصل على:

$$3(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)=n^3-n-\frac{3}{2}n(n-1). \qquad (15)$$

الباقي أن نبسط $n^3-n=n(n^2-1)$ ونستخدم الفرق بين صيغتي المربعات من الفصل الخامس ونكتب ذلك $n(n-1)(n+1)$. والجانب الأيمن يصبح

$$n(n-1)(n+1)-\frac{3}{2}n(n-1).$$

هذان الحدان بينهما عامل مشترك $n(n-1)$ وبالتالي:

$$n(n-1)\left((n+1)-\frac{3}{2}\right)=n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right).$$

ولنجعل المجموع بشكل أفضل نكتبه $\frac{n}{2}(n-1)(2n-1)$ بقسمة ذلك على 3 نحصل على:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1). \qquad (16)$$

هذا هو مجموع $n-1$ من مربعات الحدود الأولى. إذا رغبنا في الحصول على مجموع n من مربعات الحدود الأولى نضع $n+1$ بدلًا من n في الصيغة (16) ثم بإعادة ترتيب الحدود الرئيسية في حاصل الضرب نحصل على:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \qquad (17)$$

يمكننا الآن المضي واستخدام هذه التقنية المكررة للحصول على مجموع n من المكعبات الأولى، والقوى الرابعة، وفي العموم القوى من رتبة k: في حالة المكعبات ستركز على تقارب المجموعة من $(m+1)^4-m^4$ وسيصبح:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

وأيضًا:

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

مجموع الأعداد الصحيحة هو كثيرة حدود من الدرجة الثانية في n، مجموع المربعات هو كثيرة حدود من الدرجة الثالثة، وليس من الصعب الاقتناع (وأيضًا ليس صعبًا جدًّا البرهان الجاد) بأن صيغة المجموع لقوى k ستكون كثيرة حدود في n تحتوي n^{k+1} على أنها أعلى قوة. مسألة إيجاد مجموع قوى من رتبة k تصبح مسألة تعيين المعاملات لكثيرة حدود معينة. هذه المعاملات تُعطى بدلالة ما يسمى «أعداد برنولي» Bernoulli numbers، وهي تظهر في مسائل من هذا النوع.

المتسلسلة الهندسية

أهم مجموعة من المتسلسلات هي المتسلسلة الهندسية. وتظهر باستمرار في التطبيقات ولاسيما في دراسة الفائدة المركبة (لكنها تتغلغل في مبادئ الاقتصاد) وكذلك في مواضيع دراسة نمو السكان.

ربما تكون أقرب المسائل من هذا النوع تحدث في قصة، أعتقد أنها من أصل فارسي، للرجل الذي اخترع لعبة الشطرنج؛ كان الملك سعيدًا فسأل مخترع اللعبة الجديدة أن يطلب مكافأة، بتواضع طلب بعض الحبوب: حبة قمح واحدة للمربع الأول من رقعة الشطرنج، حبتين للمربع الثاني، 4 حبات للمربع الثالث، 8 حبات للمربع الرابع ... وهكذا، وافق الملك على طلب الرجل بسرور لكنه وجد أنه سيعطيه أكثر من الحبوب الموجودة في العالم، كما سنرى بعد قليل.

كما في حالة المتتابعات الحسابية، فالمتتابعة الهندسية تبدأ بحد اختياري مبدئي a، لكن هذه المرة نسبته إلى الحد التالي، (وليس الفرق بينهما) هو المقدار الثابت. هذه النسبة المشتركة يرمز لها بالرمز r. وبالتالي فإن n من الحدود الأولى للمتتابعة الهندسية الشائعة تأخذ الشكل.

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$$

فعلى سبيل المثال إذا كانت $a = 1$، $r = 2$ نحصل على المتتابعة الهندسية التي رأيناها سابقًا.

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$$

إذا جمعنا المتتابعة الهندسية حصلنا على المتسلسلة الهندسية:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}. \qquad (18)$$

يمكن إيجاد تعبير مغلق عن (18)، ونعني به تعبيرًا له عدد ثابت من الحدود ولا يعتمد على قيمة n، باستخدام حيلة تربط (18) بمجموع متقارب، نضرب المتسلسلة الهندسية بالمقدار $1 - r$:

$$(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1})(1 - r).$$

نستخدم قانون التوزيع فنحصل على:

$$\begin{aligned} &a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\ &- ar - ar^2 - ar^3 - \cdots - ar^{n-1} - ar^n, \end{aligned}$$

ومن قانون الحذف نحصل على:

$$a - ar^n = a(1 - r^n).$$

بقسمة الطرفين على $1 - r$ نحصل على:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \qquad (19)$$

يمكننا اختبار هذه الصيغة الآن لمجموع قوى 2، التي صادفناها في بداية الفصل الأول:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1. \qquad (20)$$

حيث الطرف الأيسر متسلسلة هندسية $a = 1$، $r = 2$، عدد الحدود في هذه المتسلسلة هو $n + 1$ ونحتاج لضبط هذا المجموع لـ n من الحدود باستخدام الصيغة (19)

$$\frac{1(1-2^{n+1})}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1.$$

وهذا يحل أيضًا مشكلة الحبوب على رقعة الشطرنج. والجائزة تحدد بالمعادلة (20) حيث n هي 63، وسيكون الملك مدانًا بمقدار:

$$2^{64} - 1 \approx 1.84 \times 10^{19}$$

حبة قمح! ولم يكن الملك يعرف بالطبع ما هي سرعة تزايد المتسلسلة الهندسية (ومع أن الملك ظهر غبيًّا، فإننا نؤكد أنه كان سمحًا وأخذها بحسن نية).

بالعودة إلى الرياضيات، القصة استخدمت لتوضيح حقيقة أنه إذا كانت النسبة المشتركة r تزيد عن «1» فإن المتسلسلة تنمو بدون حدود مع زيادة n. هذا لن يحدث على أية حال إذا وقعت r بين -1، 1 أي: $(-1 < r < 1)$ لأنه لكل قيمة كبيرة من n الحد r^n بدلًا من أن يزيد عن الحدود السابقة كما كان الحال عند r كبيرة فإنه ينكمش إلى الصفر. في هذه الحالة فإن مجموع المتسلسلة يصل إلى نهاية كلما زادت n، ولأن الحد r^n لا يفيد في هذه النهاية فإننا نجد:

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r}, \quad -1 < r < 1. \qquad (21)$$

هذا يسمح لنا أن نتحقق من المتسلسلة اللانهائية التي نشأت في مشكلة الساعة في الفصل الأول. في هذا المثال $a = 1$، $r = \frac{1}{12}$. أي أن:

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{1}{(\frac{11}{12})} = \frac{12}{11}.$$

وبالمثل يمكن للقارئ التحقق من أن: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$. وبهذا نكون قد أزلفنا إلى عالم المتسلسلات اللانهائية.

المتسلسلات اللانهائية

المتسلسلات اللانهائية تكون أسهل في تناولها من المتسلسلات المحدودة، فمثلًا لو أخذ المتسلسلة الهندسية اللانهائية:

$$L = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

مع الفرض أن هذه المتسلسلة لها النهاية L، ونستطيع بسهولة التعبير عن هذه النهاية بواسطة a، r. فقط نلاحظ أن:

$$L = a + r(a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots) = a + rL.$$

بحل هذه المعادلة $L = a + rL$ يعطي:

$$\begin{aligned} L - rL &= a \\ &\Rightarrow L(1 - r) = a \\ &\Rightarrow L = \frac{a}{1 - r}, \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة التي أوجدناها في الجزء السابق حيث اختبرنا بعناية ما يحدث عندما تحولنا من المتسلسلة المحدودة إلى المتسلسلة اللانهائية. كما رأينا هناك أن المتسلسلة الهندسية اللانهائية تتقارب بشرط أن تقع النسبة المشتركة r بين -1، 1. وهذا يؤكد أن الحد r^n يقترب من الصفر عندما تصبح n كبيرة، فمثلًا المتسلسلة في (4):

$$4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \cdots$$

هي متسلسلة هندسية حيث $a = 4$، $r = -\frac{1}{3}$، وبالتالي يكون المجموع:

$$\frac{a}{1 - r} = \frac{4}{1 + \frac{1}{3}} = 4 \times \frac{3}{4} = 3.$$

هذه أيضًا فرصة لإعادة النظر في مشكلة الروليت الروسية (السؤال (٤) في الفصل السادس) نذكر أن هناك فرصة واحدة من ست لإطلاق النار من

السدس على كل لاعب في دوره. احتمال أن يفشل السدس في إطلاق النار لكل من اللاعبين في أي جولة معينة هو:

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

احتمال أن يفوز اللاعب A مع الطلقة $(n+1)$ وذلك بعد عدد n من الجولات غير الناجحة هو:

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{25}{36}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

الاحتمال p أن يفوز اللاعب A هو مجموع هذه الاحتمالات الفردية على جميع قيم n الممكنة:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \cdots$$

وهذه متسلسلة هندسية لا نهائية حيث الحد الأول $a = \frac{1}{6}$ و$r = \frac{25}{36}$ ومنها نحصل على:

$$p = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{6} \div \left(1 - \frac{25}{36}\right) = \frac{1}{6} \div \frac{11}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11},$$

مما يؤكد الحل في الفصل السابق. هذا النهج يتطلب المزيد من العمل، لكن يكشف عن بعض المعلومات الإضافية على طول الطريق.

لنلقِ نظرة على بعض المتسلسلات اللانهائية غير الهندسية. كما ذكرنا سابقًا المتسلسلة التوافقية — مجموع معكوسات الأعداد الصحيحة الموجبة — تتباعد، أي أن:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

تتزايد بلا حدود (بالرغم من البطء الشديد). حدود المتسلسل صغيرة، لكنها ليست صغيرة كما في المثال السابق وهذا يتسبب في أن تتصرف بطريقة مختلفة تمامًا.

في الواقع من السهل إثبات أن المتسلسلة التوافقية تتباعد. الحجة القياسية تعتمد على تجميع الحدود في مجموعات ثم المقارنة:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ >1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ =1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\end{aligned}$$

السبب في أننا نجمع الحدود في الأقواس بهذه الطريقة خلق مجموعات من الحدود مجموعها يزيد عن $\frac{1}{2}$ وبالتالي فإن مجموع المتسلسلة يزيد بلا حدود. ومن المسلم به أننا نحتاج مضاعفة عدد الحدود التي نأخذها في كل مجموعة للمرور إلى المجموعة التالية، ولكن لأن المتسلسلة لا نهائية فإن هذا لا يمثل أي صعوبة، وبالتالي المجموع ليس له قيمة نهائية.

من المدهش أن توجد صيغة بسيطة تسمح لنا بحساب مجموع أي عدد من الحدود من المتسلسلة التوافقية بدرجة كبيرة من الدقة:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\frac{1}{2n}+\ln n+\gamma. \qquad (22)$$

مرة أخرى التعبير $\ln n$ يعني لوغاريتم n بالنسبة للأساس e، ولكن ما هو العدد الغامض γ أخاف ألّا يوجد من يعرف الكثير عنه، هذا العدد يسمى ثابت (أويلر ماشيروني) وهو موجود مؤكدًا، وبواسطته نعني أن التقريب في (22) يصبح أكثر دقة كلما زادت قيمة n. الثابت γ يمكن حساب قيمته لأي عدد من الأماكن العشرية: فمثلًا لأربعة أماكن عشرية يساوي 0.5772 أي أن:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\approx\frac{1}{200}+\ln 100+\gamma=5.187.$$

على أية حال، حتى السؤال الأساسي عما إذا كان العدد γ عددًا قياسيًّا أم لا لم يُجَب عنه بعد. خلافًا للثوابت الطبيعية الأخرى مثل e، π، فإن العدد γ

لم يظهر في مكان آخر في الرياضيات، مما يجعل من الصعب الإمساك به. دائمًا النتائج الرياضية الجديدة تُستخلص من قدرة التمكن من البحث عن شيء واحد بطريقتين مختلفتين، ودمج الرؤية من الزاويتين دائمًا تجعل الأمر واضحًا. لا نزال نفتقر إلى خبر زاوية كما بينه نستطيع منها معرفة γ.

يمكننا استخدام معرفتنا عن تباعد المتسلسلة التوافقية لتوسيع نتائجنا عن الكسور المصرية في (الفصل ٥). نتذكر أن أي عدد قياسي فعلي، $\frac{m}{n}$، يمكن كتابته على صورة مجموع معكوسات أعداد موجبة مختلفة. يمكننا الآن إزالة الشرط أن $m < n$.

لنعتبر $k \geq n$ أي أن $\frac{k}{n}$ كسر غير فعلي وهذا يمكن كتابته كعدد مركب $a + \frac{m}{n}$، حيث a عدد صحيح موجب وأن $\frac{m}{n}$ كسر فعلي. بطريقة (الفصل ٥) يمكن كتابة $\frac{m}{n}$ كمجموع عدد m أو أقل من معكوسات أعداد موجبة مختلفة.

فمثلًا نفرض أن العدد هو $\frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7}$ أي أن $a = 2$، $m = 2$ و$n = 7$. طريقتنا تعطي:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

بعد ذلك، نركز على العدد a. لنأخذ متسلسلة توافقية ونحذف المعكوسات المستخدمة في $\frac{m}{n}$. المتسلسلة الباقية لا تزال تباعدية لأن حذف عدد محدود من الحدود لا يغير طبيعة التباعد، وقد يحدث أن تتجاوز قيمة a المعطاة بجمع عدد كافٍ من حدود المتسلسلة. نركز على حدود المتسلسلة التي تأخذ أقرب ما يمكن للهدف a.

في مثالنا $a = 2$، ونضع في الاعتبار أنه ممنوع استخدام الكسرين $\frac{1}{4}$ و$\frac{1}{28}$ مرة أخرى، لنبعدهم عن المتسلسلة ونبدأ الجمع، فنجد أن:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6} < 2 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{30}.$$

نجد أن:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

إذا كان الكسر $\frac{1}{6}$ كسر غير أحادي فيجب استخدام طريقة (الفصل ٥) لكتابته كمجموع كسور أحادية مختلفة. على أية حال مثالنا قد تم وبجمع تحليلنا للعدد 2 مع تحليل $\frac{1}{4}$ نصل إلى:

$$\frac{16}{7} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{28}.$$

وهكذا يكون هناك ثلاث مراحل للتحليل: التحليل الأول $\frac{m}{n}$، ثم تحليل أكبر جزء ممكن من a مع التأكد من عدم تكرار أي من الكسور الأحادية التي استخدمت في المرحلتين الأوليين: في النهاية نجزئ الكسر الفعلي من a. ودائمًا نتأكد من عدم تكرار أي كسر أحادي استخدم في المراحل السابقة وذلك باستخدام فقط الحدود من المتسلسلة التوافقية التي تكون بعيدة بقدر كافٍ على طول السلسلة لحظيًّا، فإذا ظهر كسر الوحدة $\frac{1}{28}$ مرة أخرى في المرحلة النهائية فيمكننا في الأساس تحليل a باستخدام كسور الوحدة التي مقامها يزيد عن 28 فقط. حقيقة أن المتسلسلة التوافقية تتباعد تسمح لنا بأن نبدأ على أي بعد على طول المتسلسلة قدر ما نحتاج. عدد الحدود المطلوبة في التحليل قد يكون كبيرًا جدًا لكن دائمًا التحليل المناسب يمكن إيجاده.

نعود مرة أخرى، كما وعدنا، إلى مجموع معكوسات مربعات الأعداد. باستخدام الطريق النقيض للمتسلسلة التوافقية سوف نثبت أن المتسلسلة (7)،

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots,$$

تتقارب. ننظر أولًا في معالجة المتسلسلة (8):

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

السبب في أن هذه المتسلسلة أكثر قابلية للتعامل هو أن الحد العام $\frac{1}{n(n+1)}$ يمكن كتابته على الصورة $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$، حقيقة يمكن تحقيقها بالجمع باستخدام المقام المشترك:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

هذا يسمح لنا بكتابة المتسلسلة في الشكل التقاربي:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

فإذا أخذنا مجموع n من الأقواس لهذه المتسلسلة فإن كل الحدود تحذف ماعدا الحد الأول 1 والحد الأخير $-\frac{1}{n+1}$، فمثلًا مجموع الأربعة حدود هو $1-\frac{1}{5}$ وبالتالي مجموع أول n من حدود هذه المتسلسلة هو:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

فإننا نستنتج أن هذه متسلسلة تقاربية: المجموع يتزايد كلما أخذنا عددًا أكبر من الحدود لكنها لن تزيد أبدًا عن واحد. في الحقيقة لأن $\frac{1}{n+1}$ يتقارب إلى الصفر كلما زادت n، وبالتالي فقيمة النهاية لهذه المجاميع — التي نعني بها مجموع المتسلسلة اللانهائية — موجود ويساوي الواحد.

يمكننا الآن أن نثبت أن المتسلسلة الأصلية لمجموع معكوسات مربعات الأعداد تتقارب باستخدام حجة المقارنة. بمقارنة المتسلسلتين:

$$\frac{1}{2\times 2}+\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{4\times 4}+\frac{1}{5\times 5}\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

و

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

فإذا قارنا المقامات للحدود المتناظرة في كل من هاتين المتسلسلتين نجد أن كل مقام في المتسلسلة الأولى أكبر من نظيره في المتسلسلة الثانية، وهذا يعني

أن كل حد في المتسلسلة الأولى أصغر فعلًا من نظيره في المتسلسلة الثانية، وبالتالي إذا جمعنا n من الحدود الأولى في المتسلسلة الأولى فإن المجموع سيكون أصغر من مجموع n من الحدود الأولى في المتسلسلة الثانية. وقد رأينا توًا أن مجموع n من الحدود الأولى في المتسلسلة الثانية دائمًا أقل من الواحد، ويكون كذلك مجموع n من الحدود الأولى في المتسلسلة الأولى دائمًا أقل من واحد، أي أن المتسلسلة الأولى تتقارب لنهاية أقل من واحد وهو نهاية المتسلسلة الثانية. ونستنتج أن مجموع معكوسات مربعات الأعداد يتقارب لأن:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2.$$

أخشى أننا لسنا في وضع لاقتراح قيمة النهاية السحرية $\frac{\pi^2}{6}$، ولكن المتسلسلة لها خاصية رائعة أخرى، على الأقل، عدد الحدود المطلوب جمعها للحصول على قرب $\frac{1}{n}$ من النهاية هو n بالضبط. فمثلًا، مجموع العشرة حدود الأولى على قرب 0.1 من النهاية لكن مجموع تسعة حدود لا يحقق ذلك، ومن الغريب أنه يمكن إثبات ذلك دون معرفة قيمة النهاية باستخدام بعض التقنيات أكثر قليلًا مما سبق ذكره.

الفائدة المركبة وحاصل الضرب الطويل جدًا

إذا كان لدينا مجموع لا نهائي، فلماذا لا يكون حاصل ضرب لا نهائي؟ يوجد بعض حواصل الضرب اللانهائي الجميلة تحتوي على العدد π. ربما أصلها جميعا هو صيغة جون واليز (John Wallis) من القرن السابع عشر الميلادي:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

مثلما تمكنا من إيجاد المجاميع المحدودة فإنه يمكننا إيجاد قيمة حواصل الضرب المحدودة. حتى نقول إن حاصل الضرب اللانهائي يساوي $\frac{\pi}{4}$ يعني أننا كلما أوجدنا قيمة حاصل ضرب أطول وأطول من هذا التعبير فالإجابة

التي نحصل عليها ستكون دائمًا قريبة من بقيمة مسموح لها من التقريب في النهاية. تذكر أننا لاحظنا أن المجموع اللانهائي ليكون لديه فرصة التقارب فإن كل حد يجب أن يصل إلى الصفر، وبالمثل فحاصل الضرب اللانهائي حتى يتقارب يجب أن كل حد يصل إلى الواحد. هذا هو الحال مع حاصل ضرب واليز (Wallis): إذا نظرنا إلى أي زوج من الحدود لها نفس المقام فإنها ستكون بالصورة:

$$\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}=\frac{4m^2}{4m^2-1},$$

أي أن حاصل ضرب هذا الزوج أكثر قليلًا من الواحد. (فمثلًا عند $m = 5$ يكون $\frac{100}{99}$ هو حاصل الضرب المطلوب).

حاصل ضرب واليز (Wallis) يأتي من بعض الحيل الرياضية التي تحوي مساحات تحت منحنيات لقوى الدوال المثلثية. حاصل ضرب لا نهائي آخر يحوي π اكتشف في نهاية القرن السادس عشر بواسطة فيتي (Viète)، وهو لا يأتي إلا من تقريب الدوائر بكثيري الإضلاع، كما تشك من الصيغة التي يتخذها:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdots$$

هذه الحليات الرياضية الجميلة قد تبدو لحد ما غير مهمة. الوضع الأكثر غرابة يؤدي إلى أسئلة كلاسيكية تنطوي على السلوك النهائي لحاصل الضرب وهذه هي مسألة الفائدة المركبة لـ برنولي (Bernoulli).

لنفرض أنك تستثمر وحدة واحدة (الوحدة قد تكون جنيهًا أو دولارًا أو ألف جنيه أو ألف دولار) في نظام يدفع لك سنويًا 100% ربح (نسبة الفائدة الفعلية تختلف قليلًا مع طبيعة المسألة، ولم أختر هذه القيمة المزعجة إلا لتسهيل الحسابات)، بعد عام واحد سيكون لديك وحدتان، ستكون أفضل على أية حال مع نظام يدفع لك 50% مرتين في السنة. لأنك

ستأخذ فائدة على الفائدة التي أخذتها في النصف الأول من السنة. كل ستة أشهر رأس مالك سيصبح $1\frac{1}{2}$ مرة من رأس المال السابق، بكلمات أخرى سيكون حسابك في نهاية العام:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 \text{ وحدة}$$

أي أن الفائدة الفعلية هي 125%. الأفضل هو الحساب الذي يدفع فائدة شهرية لأن مدخراتك سوف تضرب في $1\frac{1}{12}$ كل شهر ونحصل على:

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2.613 \text{ وحدة}$$

وهذا يعطي فائدة سنوية بنسبة 161.3%.

كلما قصُرَتْ فترة الانتظار لدفع الفائدة التالية كان أفضل للمستثمر، فإذا كان حسابك يعطي فائدة يومية متراكمة ستكون أفضل وهكذا. وفي الواقع، يمكن أن يدفع البنك فائدة كل ساعة أو حتى كل ثانية، لماذا لا تأخذ الأمر إلى نهايته وتقدم حسابًا يعطي فائدة متصلة، هل هذا ممكن؟

هل سيفلس البنك لأنه سيدان بمبلغ لا نهائي من النقود؟

الإجابة هي لا؛ فهذا يمكن تنفيذه لأن الفائدة على حساب العميل ستكون دائمًا محدودة مهما صغرت الفترة بين دفع الفوائد.

الحالة العامة هي: سيدفع لك n من المرات كل سنة وفي كل مرة فإن حسابك سوف يضرب بمعامل $1+\frac{1}{n}$، وبالتالي في نهاية العام سيكون عدد الوحدات التي تملكها هي:

$$P=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

ونرى أنه كلما كبرت n فإن P ستكون أكبر، ومهما زادت قيمة n فإن قيمة P ستكون دائمًا أقل من 3. لإثبات ذلك بالتفصيل — ولن نقوم بهذا هنا — يمكن للفرد أن يفك حاصل الضرب P مستخدمًا نظرية ذات الحدين (الفصل الرابع) ويلاحظ أن حدود المفكوك كل منها أصغر

من مثيلاتها من حدود متسلسلة هندسية معينة لها المجموع 3. القليل من العمل سوف يعطي نهاية P عندما تكبر n كبرًا كافيًا وهو العدد $e = 2.71828\ldots$ وهو الأساس في نظام اللوغاريتمات الطبيعية.

الفصل الثامن

الفرص وألعاب الفرص

أعياد الميلاد والفائزون المحظوظون المدهِشون

إذا عادت ابنتك الصغيرة من المدرسة تقول إن طفلين في الفصل لهما نفس يوم الميلاد وتسأل «أليس هذا مدهشًا؟» فإن الإجابة الرياضية الصحيحة لسؤالها هي: لا، ليس هذا مدهشًا، وهو متوقع مرة كل حين. وليست هذه الطريقة هي التي ننصح بها الآباء في الرد، فمن المهم أن نرى لماذا هي كذلك؛ لأن الإجابة الصحيحة مدهشة.

إذا كان لدينا شخصان، ما هي فرص أنهما مولودان في نفس اليوم من الأسبوع؟

الإجابة هي $\frac{1}{7}$. الشخص الأول له يوم معين (يوم في الأسبوع لمولده) وبالتالي يوجد لهذا فرصة من سبع حتى يكون اختيار الشخص الثاني متفقًا مع هذا اليوم. طريقة أخرى للبحث هي أن احتمال أن يكونا وُلدا في أيام مختلفة للأسبوع هي: $\frac{6}{7} = \frac{1}{7} - 1$.

لنفرض أن لدينا ثلاثة أشخاص: ما هي فرص أن يكونوا ولدوا في أيام مختلفة من الأسبوع؟ هذا هو نفس نوع المشاكل مثل مسألة اليانصيب القومي في الفصل السادس. بواسطة المنطق المُعطى هناك الإجابة تكون:

$$\frac{6}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{49} \approx 0.61.$$

لإيجاد فرص أن أربعة أشخاص سيولدون في أيام مختلفة من الأسبوع نضرب هذا الرقم في العدد $\frac{4}{7}$ فنحصل على 0.35 بالتقريب.

عكس أن تكون أيام الميلاد جميعها مختلفة، هو أن يكون اثنان أو ربما أكثر، لهما نفس يوم الميلاد؛ نطرح الاحتمالات السابقة من واحد فنجد أن فرصة اثنين أو أكثر لهما نفس يوم الميلاد هو 0.39 عندما يكون لدينا ثلاثة أشخاص، و0.65 عندما يكونون أربعة. إنها تأخذ أربعة أشخاص قبل أن نتوقع نتيجة أحسن من 50–50 فرص للتطابق من هذا النوع؛ لأن 4 هي أقل عدد يزيد عن نصف 7، يمكنك القول إن الإجابة هي ما كنت تتوقعه. ملاحظة عابرة: إنه إذا كان لدينا 8 أشخاص فالاحتمال أنه على الأقل يوجد تطابق واحد سيكون 1 — وهذا لا يمكن تحاشيه لأن هناك أشخاصًا أكثر من أيام الأسبوع. هذا تطابق مع مبدأ عش الحمام، الذي شُرح في الفصل السادس.

قد يبدو هذا غير ملحوظ تمامًا، لكن يستخدم لشرح الطريقة التي بها يمكننا إجابة السؤال الأصلي «أليس هذا مدهشًا؟» كيف يرجح حدوث هذا في فصل به 30 طفلًا: مثلًا اثنان أو أكثر يشتركون في يوم الميلاد نفسه؟ الحسابات السابقة التي تخص أيام الأسبوع قد تقترح أن الإجابة هي «غير مرجح»، لأنه إذا وجد شيء يتفق معها فقد يؤدي بنا إلى تخمين أننا في حاجة إلى مجموعة تحتوي على الأقل نصف عدد أيام السنة، أي فصل يحتوي على 183 تلميذًا، قبل أن يكون لدينا ما هو أفضل من مجرد فرصة لتطابق نفس يوم الميلاد. هذا مجرد تخمين مع أن نوع المشكلة هو نفسه بالضبط، لكن الأعداد مختلفة ولهذا قفزنا إلى النتائج، بتجاهل التعقيدات البسيطة الخاصة بالسنوات الكبيسة، فإن احتمال أن 30 طفلًا لهم 30 يومَ ميلاد مختلفًا هو حاصل ضرب الـ 29 كسر التالية:

$$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\cdots\times\frac{337}{365}\times\frac{336}{365}.$$

هذا العدد صغير جدًّا، أقل من 0.3، أي أن فرصة أن اثنين أو أكثر من الأطفال لهم نفس يوم الميلاد أفضل من 7 في 10. حقيقة في فصل ليس

به إلا 23 طفلًا احتمال أن يتفق يوم الميلاد أحسن من 50–50. هذا لا يسبب أبدًا دهشة الناس، والشاهد على أن بعض ما يبدو كأنه مجرد صدفة مذهلة غالبًا ما يخفت، ولا يقدر أن احتمالات يوم الميلاد ليست أبدًا هي ما توقعته.

هذا صحيح أنني فرضت أن أيام الميلاد من المرجح أن تقع في أي يوم من السنة. توقعت أن هذا الفرض المنتظم له صدى جيد، مع أن مستشفيات الولادة — التي تحتفظ بالسجلات — تعرف أكثر الأوقات ازدحاما بالمواليد، ومع ذلك فإهمال التوزيع المنتظم لن يضعف الحجة لأن هذا لا يستخدم إلا لزيادة احتمال الصدفة، لنأخذ مثالًا خياليًا جدًا: نفرض أننا سألنا نفس السؤال في مجتمع حيث الرجال والنساء اضطروا إلى العيش حياة منفصلة تمامًا باستثناء شهر واحد من العام، يوليو مثلًا، التصور بالنسبة للأطفال سيكون مقيدًا للشهر الفعلي لكل أعياد الميلاد بعد تسعة أشهر أي في أبريل، سيكون مؤكدًا عندئذ أن مجموعة من ثلاثين فردًا سيتقاسم اثنان منهم نفس عيد الميلاد (في أبريل).

كثيرا ما نسمع عن قصص فيها شخص ما محظوظ بدرجة لا تصدق ويخسر في حدث خاص مع توكيدات بأن الخاسر سيكون واحدًا في المليون. مع ملايين الفرص التي تحدث يوميًا فإن من الصحيح أن أحداثًا متطرفة وغير عادية ولا محتملة تحدث بالصدفة. أحيانًا، على أية حال، هذه الأحداث غير المحتملة هي بشكل خاص لا تستبعد على الإطلاق. التناقص الظاهر يعود إلى عدم التمييز بين الحدث غير المحتمل لشخص ما وما يحدث لشخص معين. فمثلًا ليس هناك ما يدهش حول فوز أحدهم باليانصيب، هو مدهش فقط عندما يحدث لشخص رشحته مقدمًا. عدم إدراك هذه النقطة في حالات أكثر تعقيدًا يمكن أن يؤدي إلى نتائج محيرة للغاية.

مثلًا، لنفرض أنك عملت في شركة عملاقة للسفر بين المجرات وتكافئ العاملين بها وعددهم 100,000 شهريًا من خلال يانصيب يفوز به 100 منهم برحلة مجانية. الكمبيوتر يختار اسمًا عشوائيًا من قائمة المرتبات، ثم يعود للقائمة ويختار اسمًا آخر، وهكذا مائة مرة. من المتصور أنه قد

يحدث ويختار اسمك مرتين، ما هي فرص ذلك؟ حسنًا. احتمال أن تختار على الإطلاق ليس أكثر من واحد في الألف، أي أن فرصة اختيارك مرتين في شهر واحد تكون حوالي واحد في المليون. هذا المنطق صحيح، ويحدث أنك تقرأ ببعض التركيز في الصحيفة الشهرية للمجرات حول هاري المحظوظ الذي لم يفز بعطلة واحدة هذا الشهر بل بعطلتين. هذا كان سيئًا للغاية، لكن بعد سنة من ذلك اليوم وكنت تقرأ في الصحيفة الشهرية عن سالي الذكية، فائز مزدوج آخر بعطلتين وما أثار تهكمك الوجه المبتسم لهارى يهنئ سالي على حظها السعيد مع قائمة الفائزين في هذا الشهر وهي لا تشملك بطبيعة الحال. تشعر أن الفرص ضد كل ما يحدث يجب أن تكون فلكية وتذهب بعيدًا متمنيًا أن كل ما يحدث سبق تحديده.

صحيح أن حظ هاري وسالي مدهش قليلًا، لكن قليلًا فقط. عليك أن تسأل نفسك: ما هو احتمال أن الكمبيوتر يسحب 100 اسم مختلف من القائمة؟ هذا يعود بنا إلى مشكلة أعياد الميلاد مرة أخرى، هذه المرة مع 100,000 يوم ميلاد ومائة تلميذ، 100 فرصة من 100,000 متاحة في حين مشكلة الميلاد الأصلية، كانت في الحقيقة، وجود 30 فرصة عشوائية من 365 يوم ميلاد. الاحتمال يصبح حوالي $\frac{19}{20}$ هو بالرغم من ارتفاعه، يترك واحدًا في العشرين فرصة لفرد أو أكثر للفوز المتعدد. هذا يعني أن حظ هاري أو سالي يتوقع حدوثه في المتوسط حوالي شهر واحد في العشرين، أن اثنين من هذه الأحداث تحدث في 12 شهرًا بدلًا من 20 المتوقعة يكون مستبعدًا قليلًا ولكن ليس أكثر من ذلك.

ماذا عن حقيقة أنك أبدًا لم تفز؟ طبعًا أنت لم تفز، بعد كل ذلك، توجد فقط فرصة واحدة في الألف للفوز. إذا احتفظت بمساندة الخيول التي كانت 1000 ضد واحد فلن يكون من المستغرب عدم حدوث أي شيء.

إذا كان هذا النوع من الأمور يحبطكم حقًّا فمن الأفضل التوقف عن قراءة هذه المجلة. إذا لم تكن كذلك فسوف تعذب طوال حياتك بقصص (سعداء الخطط المدهش)، في شهر تفوز أختان توأم والشهر التالي سوف

يفوز أحدهم للمرة الثالثة بالعطلة خلال السنة. لأن هناك 100 فائز محظوظ كل شهر واحد أو اثنين منهم معرضون أن يكونوا محظوظين بشكل خاص لدرجة تثير الغضب. عليك أن تقنع نفسك بحقيقة أن هذا ربما لن يحدث لك أبدًا.

مشكلة صموئيل بيبس

صموئيل بيبس — كاتب اليوميات الشهير — كان مقامرًا عنيدًا، وذات يوم طرح على إسحاق نيوتن المشكلة العملية الآتية في القمار، النرد في لعبة الطاولة: أحد الرجال لديه عدد ستة نرود والمطلوب منه أن يسجل واحد آس (أي نرد على وجه العلامة 1) والثاني لديه 12 نردًا وعليه تسجيل اثنين آس أو أكثر، أي اللاعبين لديه ميزة؟

لدي انطباع بأن نيوتن فكر في أن المشكلة نوعًا ما أقل منه لكن مع ذلك أعطى بيبس إجابته. لعلك تشك بوجود تماثل كافٍ في المباراة لتكون عادلة مع أي من اللاعبين وليس لديهما ميزة لكن خبرة بيبس قادته لأن يظن غير ذلك، وإذا كان الأمر كذلك فإنه كان على حق. أحد اللاعبين يتمتع بميزة صغيرة — محددة — لكنها ميزة، لنرى ما هي:

ما هي فرصة فشل اللاعب الأول؟ سوف يفشل إذا كان كل نرد معه يظهر عليه رقم غير الواحد. فرص أن أي نرد يفعل ذلك هي $\frac{5}{6}$. لأن كل نرد يتصرف غير معتمد على الآخرين، نسبة مرات أن جميعها يظهر عليها رقم أكبر من الواحد هي $0.335 \approx \left(\frac{5}{6}\right)^6$. ومنها نحصل على فرص اللاعب الأول في الفوز أي رمى واحدة (آس) على الأقل هي الاحتمال المكمل لذلك:

$$1 - 0.335 = 0.665.$$

ماذا عن اللاعب الثاني؟ هذا أكثر تعقيدًا بقليل: اللاعب الثاني قد يفشل بطريقة من اثنين: إما ألّا يرمي آسات على الإطلاق أو يرمي آس واحدة، ولأن لديه 12 نردًا فإن احتمال ألّا يرمي أي آس هي $\left(\frac{5}{6}\right)^{12}$. نحن نطلب الآن احتمال أن يرمي آس واحدًا، احتمال أن الزهر الأول يظهر آس (لأنه لا

ضرر من تخيل أنه سوف يرمي كل نرد على حدة أو كان سيلقيها معا في نفس الوقت) والأخرى لم تفعل هي:

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6},$$

حيث هناك 12 كسرًا تناظر 12 نردًا. بالمثل احتمال أن النرد الثاني يظهر واحدًا والباقي لا تفعل هي:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6}.$$

مرة أخرى يوجد 12 عاملًا فعلًا، ما عدا ترتيب كتابتها وبالتالي الإجابة هي نفسها، لأنه توجد 12 إمكانية تناظر 12 مكانًا في ترتيب النرد حيث آس يمكن أن يظهر. نرى أن احتمال ظهور آس واحد فقط هو:

$$12 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{11}.$$

لإيجاد احتمال النجاح للاعب الثاني، يجب طرح من الواحد احتمالي الفشل للحالتين أي عدم رمي آس أو رمي آس واحد فنحصل على:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \times \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0.619.$$

وبذلك أجبنا صامويل بيبس «إن اللاعب الأول لديه تقريبًا 5% فرصة أكبر في النجاح من اللاعب الذي لديه 12 نردًا.»

مشكلات العد والانتخابات والانعكاس

أسئلة الاحتمالات تحتوي على عدد محدود من النتائج المحتملة على أبسط مستوى، وجميعها مرجحة بنفس القدر، ونسأل: ما احتمال حدوث بعض الأحداث المواتية؟ بصفة عامة النسبة هي:

$$p = \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{العدد الكلي للحالات}}$$

ونرى على الفور أن p تقع دائمًا بين 0 و1، القيمة الطرفية 0 تناظر حدثًا مستحيلًا وإذا كانت جميع الحالات مواتية فإن النجاح مضمون وبالتالي قيمة p هي 1.

كثيرًا ما يُعَبَّر عن الاحتمالات كنسب مئوية، 50% مرجحة تعني بالطبع احتمال $\frac{1}{2}$. عدم الدقة الشائعة في لغة الاحتمالات تحدث أحيانًا عندما يكون المتحدث متبرمًا من النتائج غير المرغوب فيها وهي ممكنة. الاعتراف دائمًا يأخذ الشكل: «يوجد احتمال محدود للحدث الممكن». ولما كانت جميع الاحتمالات محدودة فهذا لا معنى له. وهو يعني، بالطبع، وجود احتمال صغير لكنه «ممكن الحدوث».

حسابات الاحتمال p يأتي نزولًا إلى مشكلة عد أعداد جميع الحالات والحالات المواتية، أسئلة من هذا النوع متنوعة جدًا ومثيرة للاهتمام ودائمًا يمكن معالجتها من أكثر من زاوية. الأسئلة بأكثر من نرد من بين أسهل الأنواع فمثلًا، ما فرص الحصول على زَوْجي عند دحرجة اثنين من النرد؟ العدد الكلي للحالات هو $36 = 6 \times 6$ لأن كل نرد له ستة نتائج. الحالات المواتية عددها 6 تناظر أن كلا النردين تظهر 1، كلا النردين تظهر 2، وهكذا. وبالتالي فإن الاحتمال المطلوب هو $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$. متى أمكن تحديد مجموعة الأحداث الممكنة للتجربة (في هذه الحالة دحرجة النرد) كمجموعة من النتائج متساوية الحدوث، فإن مثل هذه الأسئلة تصبح مسائل عد بسيطة. فمثلا، فرصة الحصول على 7 من دحرجة النردين هي أيضا $\frac{1}{6}$. بحيث يوجد 6 حالات تعطي المجموع 7. كنتيجة ممكنة من 36 حالة واثنان فقط تعطي مجموع 11 ولها الاحتمال $\frac{1}{18} = \frac{2}{36}$ من الحدوث.

مع ألعاب الورق ليس من السهل إجراء العد المطلوب بواسطة التخمين (الحدس). فمثلًا ما فرص أن تنال مجموعة فلاش من خمسة أوراق في لعبة البوكر؟ (لعبة البوكر تتكون من خمسة من أوراق الكوتشينة العادية 52 ورقة والفلاش أن جميع الأوراق من نفس الطقم، لها نفس اللون والعلامة).

هنا بعض المعلومات عن معاملات ذات الحدين كما شُرِحت في الفصل الرابع، يمكن بها قطع شوط كبير. يد البوكر هي اختيار 5 ورقات من

أصل 52 أي أن إجمالي عدد التجمعات هي: $C(52,5)$، ويكون هذا هو مقام نسبة الاحتمال. أما عن البسط، وهو عدد مرات تجميع الفلاش، فنسأل أولًا ما عدد تجمعات الفلاش المختلفة في نوع واحد؟ ثم نضرب في 4 لحساب العدد الكلي لجميع الأنواع. عدد تجمعات الفلاش القلب مثلًا، هو عدد طرق اختيار 5 ورقات من مجموعة 13 ورقة قلب وهي $C(13,5)$. وبالتالي نكتب تعبيرًا للاحتمال p كالآتي:

$$p = \frac{4C(13,5)}{C(52,5)} = \frac{4 \cdot 13!}{5!8!} \cdot \frac{5!47!}{52!}.$$

لسنا في حاجة مؤكدة لحساب الأعداد الضخمة مثل $52!$ أو مثيلاتها. ويمكن تبسيط هذا التعبير بالحذف من البسط والمقام $5!$ و$47!$ يحذف أمامه جميع الأعداد الموجودة في $52!$ باستثناء 5 أعداد ونحصل على:

$$p = \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{33}{16,660} \approx 0.00198.$$

أي أن الاحتمال أقل من 0.2% حالة نادرة لكن ممكن تصديقها.

لقد حُلَّت هذه المشكلة باعتبار أن الاختيار هو مجرد اختيار واحد لخمسة أوراق. كما فعلنا في مشكلة اليانصيب، فإنه أيضا يمكن حلها ديناميكيًّا كما حدث في مشكلة أعياد الميلاد: تخيل التقاط الكروت الخاصة بك واحدة عند طرحها. البطاقة الأولى تحدد المجموعة (اللون والعلامة) التي ستحصل عليها، احتمال أن البطاقة الثانية تتفق مع نفس المجموعة هي $\frac{12}{51}$ (يبقى في هذه المجموعة عدد 12 بطاقة من أصل 51) وهكذا ... فنحصل على حاصل ضرب أربعة من الكسور.

$$\frac{12}{51} \times \frac{11}{50} \times \frac{10}{49} \times \frac{9}{48},$$

وهي مثل الإجابة السابقة.

مشكلتنا التالية تشبه، إلى حد ما، المشكلة السابقة، ولكن الغريب أن الحل يرجع إلى انعكاس أفكار عولجت باسم مشكلة هيرون في الفصل

السادس ومشكلة النملة التي تتنزه حول الزجاج، وقد يبدو هذا غريبًا نوعًا ما للوهلة الأولى نظرًا لطبيعة السؤال.

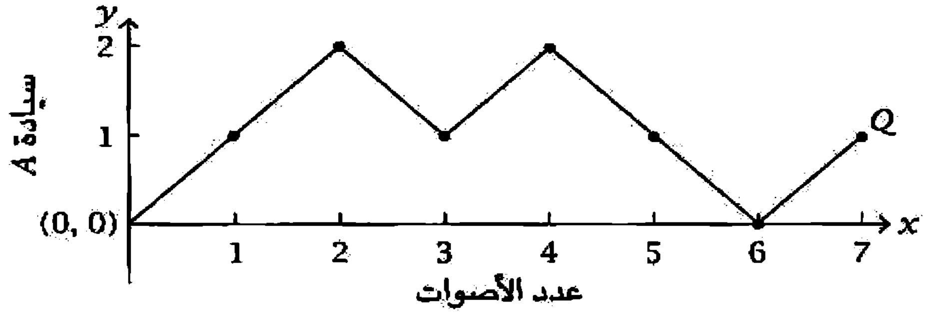
الأصوات تُعَدّ في انتخابات يوجد بها مرشحان A وB حيث A هو الفائز في نهاية المطاف. ما هو احتمال أن A تتبع B عند نقطة ما أثناء الفرز؟

الإجابة تعتمد طبعًا على عدد الأصوات التي حصل عليها كل مرشح. لجعلها بسيطة ومثيرة لنفرض أن A أخذ $n + 1$ من الأصوات وحصل B على n من الأصوات.

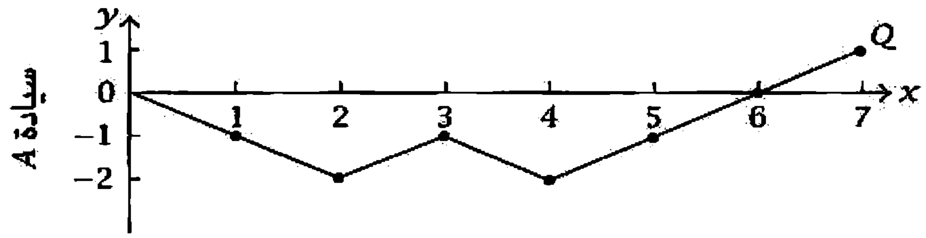
الفكرة الأولى أن ترسم صورة تصف مسار الفرز. نرسم محورين ونعين النقط (x, y) حيث النقطة (x, y) تشير إلى أنه بعد x من الأصوات التي فُرِزت كانت الصدارة لـ A بعدد y من الأصوات. قِيَم x تتراوح من 0 إلى العدد الكلي للأصوات، وهو $2n + 1$ في هذه الحالة، وقيم y تتغير لكن بأعداد صحيحة وقد تكون سالبة إذا كان لـ B صدارة الأصوات في الفرز عند بعض النقط، وأخيرًا نصل النقط معًا لنحصل على الشكل البياني الواضح. كل العد المتاح يمكن وصفه في الشكل البياني وكل مسار يبدأ عند O بالإحداثيات $(0, 0)$ وينتهي عند Q بالإحداثيات $(2n + 1, 1)$ وبعد عد جميع $2n + 1$ من الأصوات نعلم أن A فاز بصوت واحد زائد. فمثلًا إذا جَمَعَ A أربعة أصوات ولم يجمع B إلا ثلاثة، فهنا يمكن الفرز بطريقتين موضحتين في (شكل ١). الصورة البيانية للفرز تسمى مسارًا وهو مكون من أجزاء أو ببساطة مسار (شكل ٢). الفرز حيث A (في المؤخرة) يكون عند بعض نقطة المسار التي تمس أو تعبر الخط L، الذي يتكون من كل النقط التي حيث $y = -1$، لأن قيمة $y = -1$ تشير إلى فوز B بصوت واحد. باستخدام العلامة # للتعبير عن «عدد» يمكن كتابة تعبير عن الاحتمال p التي نبحث عنها:

$$p = \frac{\text{عدد المسارات التي تمس أو تقطع } L}{\text{عدد المسارات}}$$

يبقى أن نحصل على العددين في هذه النسبة؛ المقام سهل، يوجد $2n + 1$ من الأصوات منهم n من الأصوات من نصيب B. الفرز الخاص يُعيَّن عندما



(أ) AABABBA



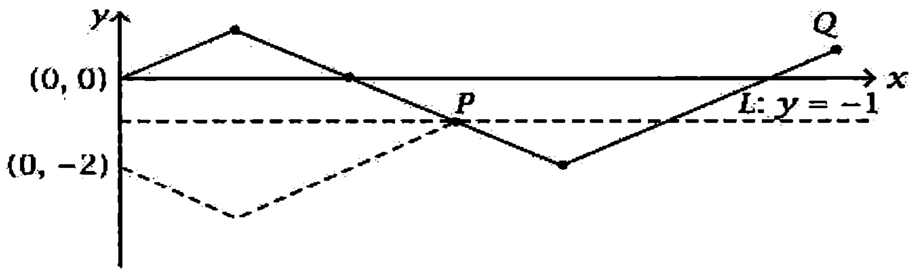
(ب) BBABAAA

شكل ١

نعرف أين حدث التصويت لـ B. عدد طرق اختيار n من الأماكن في الفرز حيث الأصوات من نصيب B من $2n+1$ من الأماكن المتاحة هو معامل ذات الحدين $C(2n+1, n)$.

بعد ذلك نجد قيمة البسط؛ خذ مسارًا يقطع الخط L ولتكن P هي نقطة التقاطع الأولى. إذا عكست المقطع من بداية المسار عند O إلى P وتترك باقي الطريق دون تغيير، فالنتيجة مسار جديد يبدأ عند النقطة $(0, -2)$ وينتهي عند النقطة Q شكل ٢. وهي نفس الحالة لو رسمنا المسار من النقطة $(0, -2)$ إلى النقطة Q حيث يقابل L أولًا عند P وإذا عكسنا المقطع السابق للمسار نحصل على المسار من O حتى Q ويقابل L.

النتيجة من كل ذلك أن عدد المسارات من هذا النوع الذي نبحث عنه تكافئ تمامًا عدد المسارات من $(0, -2)$ إلى Q. عدد هذه المسارات سهل نسبيًّا في العد لأن المسار يرتفع ثلاث وحدات من البداية حتى النهاية،



شكل ٢

فيجب وجود $n + 2$ من الأماكن على المسار حيث يهبط فقط $n - 1$ من الأماكن. المسار يحدد باختيار $n - 1$ من الأماكن حيث الطريق يهبط من أصل $2n + 1$ من الأماكن المتاحة. وبالتالي العدد الكلي للمسارات من هذا النوع يُعطَى بمعامل ذات الحدين $C(2n + 1, n - 1)$. وبالتالي نحصل على قيمة p:

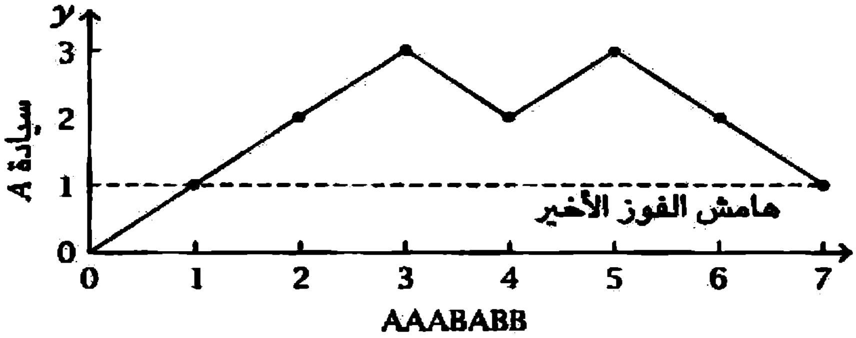
$$p = \frac{C(2n + 1, n - 1)}{C(2n + 1, n)} = \frac{(2n + 1)!}{(n - 1)!(n + 2)!} \cdot \frac{n!(n + 1)!}{(2n + 1)!}.$$

مرة أخرى معظم الحدود تحذف ويبقى لدينا:

$$p = \frac{n}{n + 2}.$$

فمثلًا إذا نال A: 99 صوتا وB: 98، كأن تقول إذا كان $n = 98$ فنحصل على $p = 0.98$، تشير إلى أن باحتمال 98% B يفوز على A في بعض مراحل الفرز فقط يحبط في النهاية.

من الممكن القول — بدون أي مزيد من الحسابات — توجد فرصة 98% أن A في بعض مراحل الفرز يزيد في العدد بأكثر من صوت، وهذا يحدث لاعتبارات الفرز العكسي كالآتي: أي مسار يمكن النظر إليه بصورة عكسية يبدأ عند Q بدلًا من O وندير الشكل رأسًا على عقب. فمثلًا، خذ الشكل ١(ب) السابق؛ بعكسه بالطريقة الموضحة يعطي صورة للفرز العكسي AAABABB. في الفرز الأصلي A أثر في مرحلة واحدة والميزة



شكل ٣

المناظرة في الفرز العكسي يمكن رؤيتها عند المرحلة المناظرة A يتقدم، وهو ما يفوق التقدير النهائي للفوز بهامش هو صوت واحد (شكل ٣).

هذه المشاكل ومشاكل أخرى مشابهة يمكن معالجتها باستخدام التقنية العكسية. السؤال الأصلي لهذا النوع يسمى مشكلة الانتخابات لبرتراند — ويتورث ونسأل: إذا كان A وB يحصل على a وb من الأصوات على الترتيب حيث $a > b$، ما هو احتمال أن A يفوز في الفرز الكلي؟ هذه أصعب قليلًا من المسألة التي عالجناها، لكن الحل يتبع نفس الخطوط ويتضح أن الإجابة تكون: $(a - b)/(a + b)$.

أسئلة الاقتراع تكون فصلًا مهمًا من المشاكل وتظهر في مواضع مختلفة مثل فيزياء الجسيمات والجبر المجرد، وهي لا تُسْتَخْدَم للحكم على الفكرة الرياضية في السياق التي شرحت فيه أولًا، الذي قد يكون أو لا يكون ذا أهمية خاصة، وأي فكرة جديدة تسمح بحل مشكلة بطريقة جيدة تستحق الاحترام.

الفوز بالقوة في الروليت

الطرق السريعة المؤكدة للكسب في ألعاب الورق أو عجلة الروليت مطلوبة دائمًا وتوجد طريقة واحدة من النظرة الأولى تبدو أنها تصلح لذلك. الفكرة يمكن تطبيقها في أي لعبة مقامرة حيث الحصص غير المحدودة مسموح بها، ولنأخذ مثلًا الروليت. اللعبة ببساطة أن تضع الحصة على اللون

الأحمر أو اللون الأسود، إذا جاء لونك فإنك تأخذ حصتك بالإضافة إلى المبلغ الذي راهنت به.

الاستراتيجية بسيطة، يمكنك أن تظل تراهن على اللون الأسود حتى تفوز. في أول دورة راهن بمبلغ 1 جنيه، فإذا خسرت فراهن بمبلغ جنيهين في المرة التالية، فإذا خسرت ثانيًا فراهن بمبلغ 4 جنيهات وهكذا، وتستمر في مضاعفة الرهان بعناد حتى يحدث ويأتي اللون الأسود، وعندها خذ المكسب وعد إلى منزلك.

هل يجعل ذلك منك فائزًا بالتأكيد؟ حسنا بطريقة ما الإجابة هي (نعم)، إذا كانت عجلة الروليت (عادلة) مطابقة للقوانين فإنها حقًّا سوف تقف عند اللون الأسود عاجلًا أم آجلًا مثلًا بعد n من الدورات حيث $n \geq 1$. كم خسرت أنت في الدورات $n - 1$ السابقة؟ بسبب استراتيجية المراهنة بالضِّعف أو لا شيء، هذا يعطي متسلسلة هندسية بسيطة يمكن جمعها باستخدام الصيغة من الفصل السابق:

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

على أية حال تفوز في الدورة النونية بمبلغ 2^n جنيه لاغيًا أي خسارة متراكمة والباقي لمكسبك هو 1 جنيه أحسن مما كنت عليه في البداية. يمكنك القول إنه ليس كثيرًا، لكنك فائز بالتأكيد، فإذا لم تشعر بالرضا فيمكنك اللعب مرة أخرى وتكسب جنيهًا وتستمر حتى تكسب المال الذي ترغبه.

هل يحدث ذلك حقًّا في الحياة العملية؟ الإجابة أنه يكاد يكون من المؤكد حدوثه. بعد هذا القول أسارع إلى تقديم المشورة لعدم استخدام هذه الاستراتيجية لأنك ستكون في خطر الخراب من أجل جنيه واحد.

ما الخطأ؟ المشكلة أنه مع أن اللون الأسود سيظهر في النهاية، فهناك دائمًا فرصة أنه لن يظهر حتى تفقد كل أموالك. للتأكيد، إذا دخلت الكازينو مع أموال كثيرة مثلًا 10,000 جنيه استرليني، فإن فرصة حدوث ذلك ضئيلة جدًّا، سوف يكون هناك 13 مرة متتالية من اللون الأحمر قبل

أن تخرج مُحرجًا من عدم تمكنك من الاستمرار في هذه الاستراتيجية. 13 مرة متتابعة من ظهور اللون الأحمر ستؤدي إلى تجمع خسارة مقدارها $2^{13} - 1 = 8191$ ولن يكون لديك أموال لتضاعف المبلغ مرة أخرى.

قد تقول بسخرية إن ذلك لا يستحق القلق إزاء أن فرصة 13 مرة متتالية الحدوث للأحمر هي واحد في المليون، هذا الوضع ليس مرجحًا، لكنه ليس محتملًا مثل أن العدد الدقيق: $\left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1}{8192} \approx 0.00012$، وهو شيء أكبر من 1 في 10,000. من الصحيح أنه من المؤكد فوزك بالجنيه، لكن لنواجه ذلك إذا كان لديك 10,000 جنيه لتعبث بها حتى تكسب جنيهًا واحدًا فهي ليست بصفقة كبيرة وإذا فعلت ذلك فإنك ستخاطر بالكثير والكثير جدًّا.

الوضع عكس ذلك في اليانصيب. في اليانصيب تُقدم على مخاطرة مهولة (لأنك من المؤكد خاسر) بحصة صغيرة من أجل فرصة ضئيلة جدًّا للفوز بمبلغ كبير جدًّا، في لعبة الروليت السابقة تأخذ مخاطرة ضئيلة على حصة هائلة من أجل الحصول على فرصة شبه مؤكدة لكسب هزيل جدًّا جدًّا، فالأفضل لك الالتصاق باليانصيب.

ميزة لعب الفريق البطولات العالمية على ملعبه

في سلسلة المباريات العالمية بأمريكا للبيسبول وكرة السلة، الفريقان في نهائي البطولة يتنافسان للفوز بالبطولة وذلك بلعب سلسلة من سبع مباريات تنتهي بفريق لا يهزم في أربع مباريات. هذا العام النهائي بين أطلانطا As وبوسطن Bs مثلًا، توجد ميزة للفريق الذي يلعب على أرضه، ولهذا السبب تعلق آمال كبيرة على ترتيب المباريات التي تلعب على أرض كل فريق. يوجد عدد من الاعتقادات هنا، لكن الاعتقاد السائد أنه توجد ميزة في اللعب مبكرًا بأرضك في هذه السلسلة، بالتحديد خلال الأربع مباريات الأولى ببساطة لأنه ربما لا تلعب أبدًا في المباريات المتأخرة، ولذلك إذا كانت مباراتك بأرضك رتبت في وقت لاحق من هذه السلسلة فقد تحرم من فرصة اكتشاف الميزة التي يضفيها هذا النظام. هذه حجة معقولة جدًّا

ومغربية، لكني سوف أثبت أنها باطلة، لا يوجد أي ميزة متأصلة في تحديد أماكن اللعب في سلسلة من سبعة مباريات.

يمكننا إظهار ذلك من خلال الحساب المباشر، ويمكن توضيح ذلك بمثال بسيط، لنقول: إن السلسلة لأفضل واحد من ثلاثة فقط، ولنفرض أن الفريق As يلعب بأرضه مرة واحدة والفريق Bs يعلب بأرضه مرتين. لنفرض أن احتمال فوز As على أرضه هو p واحتمال الفوز في أي مكان هو q، يمكن فرض أن p أكبر من q، لكن الحجة لن تعتمد على ذلك، وبالتالي احتمال خسارة As على أرضه هو $1 - p$ وكذلك احتمال خسارته خارج أرضه هو $1 - q$. لنكتب h للعب على أرضه وa للعب بعيدًا عنها لنعتبر جدولين للعب بالنسبة إلى As: haa, aah. تبعًا للحجة فإن As لديه فرصة أكبر للفوز تبعًا للجدول haa حيث يلعب الفريق على أرضه أولًا، أما الجدول الثاني فقد لا يحصلون على فرصة اللعب بأرضهم أبدًا. دعنا نحسب الاحتمالات بالنسبة لفوز As باللقب تحت كلا النظامين.

لنكتب W لفوز As ونكتب L لخسارته، مهما كانت الترتيبات في أرضه أو بعيدًا عنها. حيث يمكن لـ As أن يفوز بثلاث طرق مختلفة LWW، WLW، WW في هذه الحالة الثالثة تُلْعَب مباريتان فقط والثالثة غير ضرورية. لنعمل الآن طبقا للجدول haa. احتمال أن يخسر As المباراة الأولى هو $1 - p$ وهو يمثل خسارة على أرضه. فرصة الكسب بعيدًا عن أرضه في المباراة الثانية أو الثالثة هي q. وبالتالي طبقا للجدول haa فإن فرصة السلسلة تصبح LWW بالنسبة إلى As هي حاصل ضرب هذه الاحتمالات الثلاثة أي أن: $\Pr(LWW) = (1 - p)q^2$ («حيث Pr ترمز لاحتمال») وبالمثل يمكن حساب:

$$\Pr(WLW) = p(1 - q)q, \qquad \Pr(WW) = pq.$$

وبالتالي فإن احتمال أن يفوز As بالبطولة هو:

$$(1 - p)q^2 + pq(1 - q) + pq = q^2 - 2pq^2 + 2pq. \qquad (1)$$

الآن دعنا لحساب الاحتمال وفقا للجدول aah بنفس الأسباب فإن:

$$\begin{aligned} \Pr(LWW) + \Pr(WLW) + \Pr(WW) \\ &= (1-q)qp + q(1-q)p + q^2 \\ &= qp = q^2p + qp - q^2p + q^2 \\ &= q^2 - 2pq^2 + 2pq. \end{aligned} \tag{2}$$

الحسابات الموضحة في (1)، (2) تُعْطي نفس الإجابة. أي أنه لا توجد ميزة لـ As باللعب طبقا لـ haa أو العكس aah البديل.

يمكن القول إن لدينا نموذجًا فائق التبسيط؛ نفترض قيمة ثابتة لاحتمالات الفوز لـ As معتمدًا فقط على اللعب في أرضه أو غيرها دون الاعتماد على العوامل الأخرى بما فيها النتائج السابقة. هذا غير واقعي. للمناقشة على هذا النحو (على أية حال) هو خاطئ تمامًا. إذا كان مبدأ اللعب متأخرًا على أرضك يعتبر عيبًا مبدأ صحيحًا، فإن بتطبيقه على هذا النموذج تظهر العيوب على السطح في الحسابات السابقة، وهذا لم يحدث وبالتالي هذا المبدأ غير صحيح.

الجبر السابق يوضح أن احتمالات فوز As هي نفسها طبقا لأي من الجدولين، ولكن لا يفعل الكثير ليوضح لماذا. يبقى هذا غير واضح، لماذا الفرض الابتدائي الذي يفترض أن اللعب مبكرًا على أرضك يجب أن يعطي ميزة يكون بصفة عامة خاطئًا. قد يساعد النظر إلى الأشياء بالطريقة التالية: تخيل أن الفِرَق قررت أنها ستلعب جميع المباريات في السلسلة في حينها. لأنه لم يعد هناك إمكانية لفقد بعض جدولك للمباريات بأرضك فالحجة الأصلية لا تطبق بعد وبذلك لا يوجد أي سبب واضح لماذا المباريات المبدئية بأرضك تمنحك ميزة. على كل حال هذا التغيير الخيالي لا يستطيع تغيير إمكانية فوز As تحت أي جدول خاص لأنه يؤثر فقط بعد أن يكون الفائز قد تقرر. نصل إلى الاستنتاج أن: «الميزة الظاهرية للعب المباريات الأولى بأرضك كان سرابًا.»

مباراة أحسن ما أستطيع

هذا النوع من الألعاب يشترك فيه لاعبون عند حلقة كرة السلة لكن يمكن تطبيقه على أي مسابقة في المهارة. يأخذ اللاعبون أدوارًا لعمل بعض أنواع الحيل من اختيارهم للتسجيل، إذا نجح اللاعب فالذي يليه عليه محاولة أداء نفس العمل الفذ، فإذا فشل فإن اللاعب الأول يسجل له نقطة. السؤال هو: هل تحاول حيلًا صعبة أم حيلًا سهلة؟ الحس السليم يخبرنا أن اللاعب يفعل أفضل ما يمكن لعمل خدع يجدها أسهل نسبيًّا، ولسبب ما، يجدها المنافس صعبة. أنا متأكد أن هذا هو الحال لكن يبقى السؤال: هل كل الأشياء متساوية، أي استراتيجية تقدم أعظم إمكانية لتسجيل أهدافك؟

لتنظر إلى أبسط حالة حيث إنك والمنافس متساويان ولهذا لكل منكما نفس الاحتمال x للنجاح لأي خدعة خاصة للتصويب. سوف تسجل بالضبط في دورك عندما تنجح ويفشل الخصم. لأن احتمال الخسارة هو $1-x$ فاحتمال تسجيلك هدف له الصعوبية x يكون $x(1-x)$. مثلًا إذا حاولت التهديف حيث فرص النجاح واحد من ثلاثة فإن احتمال أن تسجل الهدف هو: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$. ما تحتاجه فعلا هو إيجاد قيمة x التي تحقق أكبر قيمة للتعبير $x(1-x)=x-x^2$.

يمكن حساب ذلك باستخدام التقنية الجبرية لإكمال المربع (الفصل الخامس) لحل المعادلة التربيعية. معامل x هنا هو الواحد الصحيح، وبالتالي نضيف ونطرح مربع $\frac{1}{2}$ ونكتب التعبير:

$$x-x^2=-(x^2-x)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

ولأن مربع أي عدد دائمًا غير سالب، فتكبير المقدار يحدث بتصغير المربع المطروح، أي بوضع $x-\frac{1}{2}=0$، أي أحسن قيمة لـ x هي $x=\frac{1}{2}$ وبالتالي فرصتك في التسجيل في دورك هي $\frac{1}{4}$. في هذه اللعبة المتوسط هو أفضل استراتيجية.

الآن دعنا لحساب الاحتمال وفقا للجدول aah بنفس الأسباب فإن:

$$\begin{aligned}\Pr(LWW) + \Pr(WLW) + \Pr(WW) \\ &= (1-q)qp + q(1-q)p + q^2 \\ &= qp = q^2p + qp - q^2p + q^2 \\ &= q^2 - 2pq^2 + 2pq.\end{aligned} \tag{2}$$

الحسابات الموضحة في (1)، (2) تُعْطي نفس الإجابة. أي أنه لا توجد ميزة لـ As باللعب طبقا لـ haa أو العكس aah البديل.

يمكن القول إن لدينا نموذجًا فائق التبسيط؛ نفترض قيمة ثابتة لاحتمالات الفوز لـ As معتمدًا فقط على اللعب في أرضه أو غيرها دون الاعتماد على العوامل الأخرى بما فيها النتائج السابقة. هذا غير واقعي. للمناقشة على هذا النحو (على أية حال) هو خاطئ تمامًا. إذا كان مبدأ اللعب متأخرًا على أرضك يعتبر عيبًا مبدأ صحيحًا، فإن بتطبيقه على هذا النموذج تظهر العيوب على السطح في الحسابات السابقة، وهذا لم يحدث وبالتالي هذا المبدأ غير صحيح.

الجبر السابق يوضح أن احتمالات فوز As هي نفسها طبقا لأي من الجدولين، ولكن لا يفعل الكثير ليوضح لماذا. يبقى هذا غير واضح، لماذا الفرض الابتدائي الذي يفترض أن اللعب مبكرًا على أرضك يجب أن يعطي ميزة يكون بصفة عامة خاطئًا. قد يساعد النظر إلى الأشياء بالطريقة التالية: تخيل أن الفِرَق قررت أنها ستلعب جميع المباريات في السلسلة في حينها. لأنه لم يعد هناك إمكانية لفقد بعض جدولك للمباريات بأرضك فالحجة الأصلية لا تطبق بعد وبذلك لا يوجد أي سبب واضح لماذا المباريات المبدئية بأرضك تمنحك ميزة. على كل حال هذا التغيير الخيالي لا يستطيع تغيير إمكانية فوز As تحت أي جدول خاص لأنه يؤثر فقط بعد أن يكون الفائز قد تقرر. نصل إلى الاستنتاج أن: «الميزة الظاهرية للعب المباريات الأولى بأرضك كان سرابًا.»

مباراة أحسن ما أستطيع

هذا النوع من الألعاب يشترك فيه لاعبون عند حلقة كرة السلة لكن يمكن تطبيقه على أي مسابقة في المهارة. يأخذ اللاعبون أدوارًا لعمل بعض أنواع الحيل من اختيارهم للتسجيل، إذا نجح اللاعب فالذي يليه عليه محاولة أداء نفس العمل الفذ، فإذا فشل فإن اللاعب الأول يسجل له نقطة. السؤال هو: هل تحاول حيلًا صعبة أم حيلًا سهلة؟ الحس السليم يخبرنا أن اللاعب يفعل أفضل ما يمكن لعمل خدع يجدها أسهل نسبيًّا، ولسبب ما، يجدها المنافس صعبة. أنا متأكد أن هذا هو الحال لكن يبقى السؤال: هل كل الأشياء متساوية، أي استراتيجية تقدم أعظم إمكانية لتسجيل أهدافك؟

لننظر إلى أبسط حالة حيث إنك والمنافس متساويان ولهذا لكل منكما نفس الاحتمال x للنجاح لأي خدعة خاصة للتصويب. سوف تسجل بالضبط في دورك عندما تنجح ويفشل الخصم. لأن احتمال الخسارة هو $1-x$ فاحتمال تسجيلك هدف له الصعوبة x يكون $x(1-x)$. مثلًا إذا حاولت التهديف حيث فرص النجاح واحد من ثلاثة فإن احتمال أن تسجل الهدف هو: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$. ما تحتاجه فعلا هو إيجاد قيمة x التي تحقق أكبر قيمة للتعبير $x(1-x)=x-x^2$.

يمكن حساب ذلك باستخدام التقنية الجبرية لإكمال المربع (الفصل الخامس) لحل المعادلة التربيعية. معامل x هنا هو الواحد الصحيح، وبالتالي نضيف ونطرح مربع $\frac{1}{2}$ ونكتب التعبير:

$$x-x^2=-(x^2-x)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

ولأن مربع أي عدد دائمًا غير سالب، فتكبير المقدار يحدث بتصغير المربع المطروح، أي بوضع $x-\frac{1}{2}=0$، أي أحسن قيمة لـ x هي $x=\frac{1}{2}$ وبالتالي فرصتك في التسجيل في دورك هي $\frac{1}{4}$. في هذه اللعبة المتوسط هو أفضل استراتيجية.

الألعاب ونظرية اللعبة

ليس هناك الكثير منا — وخاصة الأشخاص الذين يفضلون العلم — مَن لم يشاهد (ستار تريك) على مر السنين، فهذا المسلسل احتوى دائمًا على شخصية تتصرف بطريقة ميكانيكية. في الحلقات الأصلية كان السيد سبوك Spock وهو رجل من كوكب فولكان محا كل السلوك العاطفي من روحه، وفي الجيل الجديد لدينا مستر داتا، طيار لكنه في النهاية إنسان آلي خالٍ من العاطفة. السيد سبوك يؤكد لنا أنه يتصرف بطريقة منطقية دائمًا. أنا لا أستطيع أبدًا تذكر أي خصائص تشرح ما المقصود بذلك، لكننا تركنا لاستنتاج أنه يعيش بمجموعة من المبادئ والقيم ويتصرف بطريقة تتوافق معها دائمًا؛ إنه لن يُقْدِم على أي عمل غير عقلاني، بمعنى أنه لن يناقض بقصد قوانينه ولن يفعل شيئًا غير مؤذٍ وسخيف لأنه ليس لديه دافع للتصرف بهذه الطريقة.

اعترف الناس في هذا المسلسل أن هاتين الشخصيتين كانا على العموم جسديًّا وعقليًّا متفوقتان على نفسيهما، وبالتالي هناك اعتراف وحيد أن الشخصيات الإنسانية (لها قيمتها أينما كانت). البشر دائمًا ما يصرون على أن قدرتهم على العمل بدون منطق هي إحدى ميزاتهم. قد تكون هناك بعض الحقيقة في هذا لكن معظم الأمثلة التي جاءت في هذا المسلسل، هي في رأيي مغالطات، العيب يكمن في افتراض أن عدم التنبؤ هو أقرب إلى اللاعقلانية وهو في حالات كثيرة واقعية بعيدة عن الحقيقة.

في بعض الألعاب، لا سيما البوكر، من المهم أن يكون لعبك بشكل ما غير متوقع. وطبعًا هذا ليس نفس الشيء لو لعبت بطريقة غير عقلانية. الإنسان الآلي داتا دائمًا يخسر في البوكر، ربما يكون السبب أنه لا يمكن التعامل مع خِدَع منافسه البشري، هذا يعني أنه بُرْمِجَ بطريقة سيئة. في لعبة مثل البوكر من المهم ألا تقدم معلومات عمّا معك من أوراق إلى منافسك. لكنك مضطر لذلك، إلى حد ما، عند المراهنة لأن اللاعب — بشكل عام — سوف يستعد لمخاطر أكبر عندما يمسك أوراقه بيد قوية أكثر منها عندما تكون بيد ضعيفة؛ فاللاعب إذا لم يخادع أبدًا فإن منافسه سوف

يلاحظ ذلك ويستطيع قراءة قوة ما عنده من خلال حجم مراهنته، وبالتالي يكون اللاعب المنطقي في وضع غير ملائم. لا يوجد شيء غير منطقي متوارث في الخداع في لعبة البوكر، لكنها طبيعة اللعبة وتمثل جزءًا ضروريًا من الاستراتيجية الجيدة. لا يوجد سبب يبين لماذا لم يُبْنَ عنصر حكم على التحايل في استراتيجية اللعبة للحاسوب.

عندما يتكلم الرياضي أو الاقتصادي أو العسكري عن الاستراتيجية الأمثل للعبة، فأنا أعتقد أن الكثير من المستمعين سوف يفترضون على الفور أن الاستراتيجية تحتوي في بنائها (أحسن) إجابة لأي سيناريو ممكن أن ينشأ خلال هذه اللعبة. في الألعاب الواقعية ونظرية اللعبة في الحياة الواقعية نادرًا ما يحدث هذا بالتأكيد، من المهم ألا يتنبأ خصمك بإجابتك. عنصر المفاجأة في حد ذاته له قيمته ولا ينبغي الاستسلام للخصم دون انتزاع الثمن.

هذا واضح في الألعاب الأسهل جدًا من البوكر، مثل لعبة اللاعبين «ورقة وحجر ومقص». هنا اللاعبان بإشارة من اليد وفي نفس الوقت يشيران إلى الورقة، الحجر أو المقص. الورقة تغطي الحجر الذي يجعل المقص لا يقص والذي بدوره يقطع الورقة واللاعب يسجل الأهداف عندما تسيطر يده (تشير إلى الأعلى في الترتيب) على يد خصمه. من الواضح أنك لا تستطيع تحمل اللعب بالتوقع في هذه اللعبة، فعلى سبيل المثال إذا اتبعت سياسة معينة ثابتة الدورة مثلا، ورقة، حجر ثم مقص في هذا الترتيب مرة وأخرى فإن خصمك سيلاحظ ويتبنى دورة النداءات مقص، ورقة ثم حجر، ويكسبك في كل مرة. مقياس للعشوائية يجب أن يوجد في أي استراتيجية جيدة في لعبة ورقة وحجر ومقص. يوجد شيء غير منطقي في هذه اللعبة.

بعض الألعاب أسهل من البوكر ولكن أكثر صعوبة من ورقة — حجر ومقص، يمكن تحليلها رياضيًا وأفضل الاستراتيجيات محسوبة فعلًا. مثال ذلك مشروح بشكل رائع في المسلسل التليفزيوني التقليدي لبرونوفسكي the Ascent of man وهو لعبة مورا morra. في أبسط أشكالها كل لاعب

يظهر إصبعًا أو اثنين في نفس اللحظة مع تخمين عدد الأصابع التي يظهرها الخصم علمًا بأنه لا يوجد إلا أربع اختيارات (1,1)، (1,2)، (2,1)، (2,2) حيث الاختيار (2,1) يعني أن اللاعب أظهر إصبعين وخمن أن الآخر أظهر إصبعًا واحدة، إذا استطاع اللاعبان تخمين العدد فعلًا أو أن اللاعبين أخطآ معًا فلا توجد نقاط، النقاط لا تحسب إلا إذا تنبأ بالعدد الصحيح ليد الخصم وأخطأ الخصم التنبؤ. في هذه الحالة يكسب اللاعب الذي تنبؤه صحيح قدرًا من النقاط تساوي مجموع الأصابع التي أظهرها اللاعبان.

أفضل الاستراتيجيات هو إهمال الاختيارين (1,1) و(2,2) واستخدام الاختيارين (1,2) و(2,1) عشوائيًّا ولكن بالنسبة الإجمالية من 7 إلى 5. كيف تفعل ذلك؟ إنك ستحتاج إلى مُوَلِّد عشوائي للأعداد (كثير من الآلات الحاسبة لديها هذا البرنامج) جهز المولد لتوليد أعداد عشوائية من 1 إلى 12. تجاهل سلوك الخصم والعب (1,2) إذا كان العدد العشوائي المولد يقع في الفترة من 1 إلى 7 والعب البديل (2,1) إذا انتقل العدد في الفترة من 8 إلى 12. بطبيعة الحال هذا لا يضمن لك الفوز في لعبة معينة، سوف يعتمد الأمر على الحظ. على أية حال إذا التزمت هذه الاستراتيجية على المدى البعيد أي كلما لعبت العديد والعديد من الأدوار فهي استراتيجية لا تهزم، وأفضل ما يتوقع أن يفعله الخصم على المدى البعيد هو أن يتساوى معك.

يوجد قدر كبير من الحسابات استخدمت في استنتاج هذه الاستراتيجية ورياضيات أساسية في إثبات أن هذه الاستراتيجية هي الأفضل، على أية حال من السهل التحقق أن هذه الاستراتيجية فعالة مهما كانت الاستراتيجية التي يتبعها الخصم. إذا التزم اللاعب الآخر باستراتيجية (1,2) و(2,1) مثل ما تفعل، فإن أيًّا منكما لن يكسب شيئًا لأنكما دائمًا تتوقعان بشكل صحيح (هذا يحدث لأن كلًّا منكما يقوم بنداء مختلف). أو أنتما مخطئان (إذا اختار كل منكما نفس النداء)، النقاط لا تحسب إلا إذا اختار الخصم (1,1) أو (2,2). نفرض أن النداء (1,1) فإنه لعدد 7 مرات من 12 من نداءاتك يكون (1,2) وستفقد نقطتين، بالتالي وفي عدد 5 مرات من 12

نداءاتك يكون (2,1) وسوف تكسب 3 نقاط. في المتوسط من كل 12 مرة يكون فيها نداء الخصم هو (1,1) سيكون مكسبك هو:

$$5 \times 3 - 7 \times 2 = 15 - 14 = 1 \text{ نقطة}$$

حسابات مماثلة توضح أنك ستكسب إذا كان الاختيار (2,2) وسوف يكسب الخصم 4 نقطات لخمسة أدوار من 12 عندما تختار (2,1)، ولكن سوف يخسر الخصم 3 نقاط لعدد 7 من 12 دورًا إذا لعبت (1,2)، وبالتالي متوسط طول الأمد لهذا النوع من الألعاب سيكون:

$$7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1 \text{ نقطة}$$

الحسابات توضح أن التوازن هو في مصلحة استراتيجيتك، ولكن هذا لن يكون واضحًا تمامًا للاعب غير مُطَّلِع حتى بعد خبرة كبيرة في اللعب. معظم المقامرين يستنتجون بالتأكيد أن لعبة (1,1) و(2,2) يجب استخدامها أحيانًا وهذا اعتقاد خاطئ.

وهكذا نرى أن التقلب (عدم التنبؤ) يمكن أن يكون رشيدًا. على أية حال توجد حالات يكون الخصم غير المنطقي هو عدو أقوى كثيرًا من العدو العاقل؛ خذ أزمة الرهائن: تخيل أنك رجل بوليس يفاوض في محاولة لاعتقال السيد سبوك، الذي يهدد بقتل رهينة، يمكنك المناقشة:

> «سبوك الاختيار الوحيد أمامك هو الاستسلام! إذا قُتِلَ الرهينة سيُقبض عليك في أي حالة، وسوف تتعرض لعقوبة أشد. تهديدك بالتالي غير منطقي، أنت لن تنفذه لأنه ليس لديك سبب لتنفيذه.»

سبوك المنطقي سيكون عاجزًا عن دحض هذه الحجة ويمكنك إلقاء القبض عليه بكل راحة. من ناحية أخرى إذا كنت تتعامل مع انتحاري معتوه، ستكون هناك صعوبات حقيقية. يمكنك تقديم نفس الحجة ولكن سوف تقابل بالرد التالي من الخصم:

«آه حجتك مردود عليها؛ فأنا لست منطقيًّا لكن معتوه لا أحتاج لأسباب! ولا يزال لدي القوة لتنفيذ التهديد خلافًا لسبوك، أنا مُحصن ضد منطقك» (أو عبارة بهذا المعنى).

حجة المعتوه قوية جدًّا (مانعة للماء). إذا حاولت القبض عليه فإن حياة الرهينة في خطر حقيقي، الصعوبة تكمن في أن المعتوه إنسان يستطيع أن يكون لديه رغبات متناقضة وليس مثل سبوك. فمن ناحية قد لا يرغب في معاناة عقوبة أشد أكثر من سبوك، لكن من ناحية أخرى، في حاجة لإخراج شعوره القوي بالغضب والانتقام. من يدري؟ لا يستطيع أحد التنبؤ أي قرار سوف يسيطر في اللحظة الحاسمة من الصراع، تصرفاته متقلبة تمامًا حتى لنفسه، طبيعته المعُقدة والمتقلبة تمثل صعوبة خطيرة للمفاوض، من المؤكد أنه خصم صعب التعامل معه أكثر من السيد سبوك في لعبة الرهينة.

أن تكون أقوى لاعب لا يعني بالضرورة أنك ستكون في مكانة أفضل لكسب المباراة، قد يبدو هذا تناقضًا ولكن هذا النوع من التناقض ينشأ غالبًا في الألعاب التي يلعبها أكثر من لاعبين، مثل الدبلوماسية فهي تضم أممًا مختلفة، في هذه الظروف من الجيد أن تكون قويًّا دون إظهار التهديد، فإذا ظهر أنك تصنع تهديدًا لا يوافق عليه لاعبون آخرون، فإنهم سيكونون تحالفًا ويقضون عليك.

مثال على هذا النوع من الألعاب هو اللعبة المتعددة اللاعبين لتبادل إطلاق النار؛ فيها يكون لدى اللاعبين درجات مختلفة من مهارة التصويب معروفة لجميع اللاعبين، واللاعبون الأقل مهارة يمكن أن يتحولوا إلى أقوياء عندما لا يكون للاعبين الأكثر مهارة إلا خيار تصويب بنادقهم بعضهم إلى بعض، مما يؤدي إلى إبادتهم جميعًا أو قريبًا من ذلك مخلفين وراءهم الرماة الأقل مهارة لإمكانية الفوز. في الواقع في المبارزة الثلاثية أضعف الرماة (تحت نظام احتمالي معين) قد يكون أفضل حالًا بإطلاق النار في الهواء.

لعل أهم مثال لهذا النوع في نظرية الألعاب يحمل اسم «معضلة السجناء». أحيانًا تسمى متناقضة لأنها توضح أنه يمكن لسياسة الأنانية

		B: 1	B: 2
A:	1	(5, 5)	(0, 20)
A:	2	(20, 0)	(1, 1)

شكل ٤

أن تكون أفضل من سياسة التعاون لكل عضو في المجتمع، عادة تتكون من سجينين يواجهان عواقب معينة عند الاعتراف بالجريمة أو عدم الاعتراف بها، والنتيجة لا تتوقف على قرار أحدهما فقط بل تتوقف على قرار كلٍّ منهما.

الاختيارات التي تواجه السجينين تشابه لعبة نتيجتها ممثلة في الشكل ٤، اللاعب A واللاعب B:

اللاعبان لديهما اختياران: أن يكتب كل منهما الرقم 1 أو الرقم 2 في نفس الوقت، الدفعات لكل لاعب توضح في الجدول؛ فمثلًا إذا كتب اللاعب A 1 وكتب اللاعب B 2 فإن A لا يحصل على شيء في حين يحصل B على 20 جنيهًا، اللعبة تلعب مرة واحدة فقط، فماذا يجب عليهما فعله؟

لننتظر لموقف اللاعب A، فهو غير قادر على السيطرة على B، مع أنهما حران في الاتفاق معًا على أي شيء قبل اللعب، ويمكن أن يتفقا على صفقة، ومع ذلك فعندما تأتي اللحظة الحاسمة فكل منهما سيختار العدد الذي يحب؛ السيد A يريد أفضل صفقة لنفسه وهذه أسبابه: إذا كتب B العدد 1 فأنا أكسب 5 جنيهات إذا كتبتُ أنا 1، لكني أكسب 20 جنيهًا إذا كتبتُ 2، وبالتالي في هذه الحالة الأفضل أن أكتب 2. البديل هو أن B يكتب 2، في هذه الحالة لا أكسب شيئًا إذا كتبت 1، لكن أكسب جنيهًا إذا كتبت 2. وبالتالي بصرف النظر عما يكتب B فمن الأفضل أن أكتب 2، وهذا ما سوف أفعله.

اللعبة متماثلة تمامًا بالطبع وB يستخدم نفس الأسباب ويكتب 2 وهذا يعني أن الاثنين إذا كتبا 2 فسوف يكسب كل منهما جنيهًا. اللاعبان

غير الذكيين إذا تعاونا فقط وكتب كل منهما 1 فإن كلًّا منهما يكسب 5 جنيهات، لكنهما لا يثق أحدهما بالآخر، لكن لماذا يثقان؟ بعد كل ذلك المنطق في البند السابق لا تقبل المناقضة. كل لاعب يحاول إقناع الآخر بكتابة 1، لكن إذا اتبعا الأنانية فإنهما سيختاران 2. أخشى أن تكون طريقة اللعب هي معضلة السجناء.

إنه لأمر مختلف إذا كانت اللعبة تلعب مرات عديدة، لأنه من المعقول أن نتعاون حقًّا؛ اللاعبان ينبغي أن يتبادلا الأدوار، وبالتالي يتبادلا جمع 20 جنيهًا مكسبًا. في هذه الطريقة كل لاعب يحصل في المتوسط على 10 جنيهات لكل مباراة وهي أفضل من 5 جنيهات إذا استخدم الاستراتيجية (1,1) المتعاونة. لكن عندما يبدأ عدد المباريات المتبقية في التناقص فمنطق الأنانية الفورية يظهر مرة أخرى على السطح، وكل من اللاعبين يقطع رقبة الآخر، ويصبحا عرضة للسقوط في فخ الاستراتيجية (2,2) مرة أخرى.

الفصل التاسع

النسبة الذهبية

في الفصل الثاني رأينا أنه مع أن $\sqrt{2}$ ليست كسرًا عشريًّا متكررًا فإن لها مفكوكًا من نوع آخر، وسوف أشرح الآن كيف يتحقق ذلك:

نبدأ بكتابة $\sqrt{2}$ على الصورة $1 + (\sqrt{2} - 1)$ وبالتالي نفكر في العدد $\sqrt{2} - 1$ على أنه معكوس معكوسه، وهذا يبدو ضارًّا، لكن صبرًا فإنه:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1/(\sqrt{2} - 1)}.$$

هناك الآن قطعة قياسية من الجبر تسمح لك بفعل شيء مهم، هي عملية حذف الجذر من المقام تطبق على الكسر $\frac{1}{(\sqrt{2}-1)}$، بضرب كل من البسط والمقام في المرافق، في هذه الحالة $\sqrt{2} + 1$ لأنه بفك المقام يصبح خاليًا من الجذور التربيعية، لأن تغيير الإشارة سوف يؤدي إلى أن الحدود المتوسطة تتلاشى:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}.$$

وفي هذه الحالة المقام الجديد أصبح 1. وهذا يعطينا:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

يمكننا الآن استبدال الوجود الجديد للعدد $\sqrt{2}$ بالعدد $(\sqrt{2}-1)+1$ ثم لو كررنا هذه العملية بدون نهاية فسنحصل على:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+1+(\sqrt{2}-1)} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}} =$$

ونقول إن صورة الكسر المستمر للعدد $\sqrt{2}$ هي:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}.$$

يمكننا استخدام العلاقة المتكررة للكسر العشري لتمثيل هذا ونكتب $\sqrt{2} = [1, \dot{2}]$. يقطع هذا التمثيل بعد عدد معين من القسمة، فنحصل على تقريب قياسي للعدد $\sqrt{2}$ (وهو بعد ثلاث أماكن عشرية العدد 1.414). باستخدام الخطوات 1، 2، 3 فقط فنحصل على الكسور الآتية:-

$$1 + \frac{1}{2+1} = \frac{4}{3} = 1.333\dots, \quad 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+1}} = \frac{10}{7} = 1.428\dots,$$
$$1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}} = \frac{24}{17} = 1.412\dots$$

ما تعثرنا فيه هنا في الحقيقة تطبيق آخر لخوارزمية إقليدس من الفصل الرابع. لتفسير ذلك نبدأ مرة أخرى بالعدد القياسي $\frac{92}{73}$، وننظر كيفية بناء مفكوكه على شكل كسر مستمر: أولًا نطبق خوارزمية إقليدس على الأعداد 92، 73، النتيجة في هذه الحالة هي:

$$92 = 1 \times \underline{73} + \underline{19}$$

$$73 = 3 \times \underline{19} + \underline{16}$$

$$19 = 1 \times \underline{16} + \underline{3}$$

$$16 = 5 \times \underline{3} + \underline{1}.$$

نجد أن أكبر عامل مشترك بين 92، 73 هو الواحد، مشيرا إلى أن الكسر في أقل صورة له. يمكننا الآن بناء مفكوك للعدد $\frac{92}{73}$ على شكل كسر مستمر كالآتي: نبدأ بالسطر الأول من الخوارزمية، فنحصل على:

$$\frac{92}{73} = 1 + \frac{19}{73} = 1 + \frac{1}{\frac{73}{19}}. \qquad (1)$$

من السطر الثاني نحصل على:

$$\frac{73}{19} = 3 + \frac{16}{19}, \qquad (2)$$

بالتعويض في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{92}{73} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{16}{19}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{19}{16}}}. \qquad (3)$$

باستخدام السطر الثالث نحصل على:

$$\frac{19}{16} = 1 + \frac{3}{16},$$

بالتعويض فيما سبق.

$$\frac{92}{73} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{16}}},$$

وفي النهاية من السطر الرابع $\frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$ نحصل على:

$$\frac{92}{73} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}}.$$

ولهذا فإن مفكوك العدد $\frac{92}{73}$ على شكل كسر مستمر وأيضًا أي عدد قياسي له قسمة واحدة في كل سطر من خوارزمية إقليدس كما طبقت على زوج الأعداد. ونلاحظ أنه ليس مثل العدد $\sqrt{2}$ وهو عدد غير قياسي فإن المفكوك على شكل كسر مستمر يتوقف.

الطريقة العيارية عند دراسة المفكوكات من هذا النوع تثير الإنتباه إلى الكسور المستمرة، حيث البسط دائما يساوي واحد. ومع ذلك فإن المفكوكات التي تسمح لأعداد أخرى في البسط قد تم دراستها. هنا على أية حال سوف نقتصر على النوع العادي.

ليس هناك ما يمنعنا من القيام بنفس نمط الحسابات لأي عدد غير قياسي موجب a. نطبق ببساطة خوارزمية إقليدس لزوج الأعداد $(a, 1)$. الفرق في هذه الحالة أننا لن نصل إلى الباقي «0» الصفر، لأنه إذا حدث أمكننا تنفيذ الطريقة السابقة للتعبير عن a في صورة كسر مستمر منتهٍ يمكن تبسيطه إلى كسر عادي، موضحًا أن a كانت عددًا قياسيًا. على أية حال يمكن ظهور نموذج متكرر في المفكوك على شكل كسر مستمر، كما رأينا وبرهنا في حالة $\sqrt{2}$. وتبين أن الأعداد غير القياسية التي تؤدي إلى نموذج متكرر هي بالضبط الجذور غير القياسية لمعادلات تربيعية حيث المعاملات أعداد صحيحة، كمثال آخر لننظر للعدد $\sqrt{3}$.

الخطوة الأولى هي كتابة العدد المعطى a على شكل $a = n + r$ حيث n عدد صحيح، r الباقي وهي أقل من الواحد: وهذا هو السبب أن في المثال الأول كتبنا: $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$ لأن: $1 < \sqrt{2} < 2$.

أي أن: $n = 1$ و $r = \sqrt{2} - 1$. بأخذ $a = \sqrt{3}$ ونتتبع نموذج الحساب المُعطى في (1)، نحصل على:

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{3}-1)}}.$$

باتباع (2) نريد التعبير عن $\frac{1}{(\sqrt{3}-1)}$ في الصورة $n + r$ أي: «عدد صحيح + باقي»، ويتحقق ذلك بحذف الجذر من المقام:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

ولأن: $2 > \frac{(1+\sqrt{3})}{2} > 1$ وبالتالي:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 1 + \frac{1+\sqrt{3}-2}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

نستطيع الآن التقدم للخطوة المقابلة لـ (3) السابقة:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{(\sqrt{3}-1)}}}.$$

بالاستمرار في هذه الطريقة نحصل على:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = \sqrt{3}+1.$$

بكتابة ذلك على الصورة $n + r$ فسنحصل على:

$$\sqrt{3}+1 = 2 + (\sqrt{3}-1),$$

ونصل إلى:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{(\sqrt{3}-1)}}}.$$

ولأن $\sqrt{3}$ عدد غير قياسي فإن العملية غير منتهية ونحصل على نفس الباقي $\sqrt{3} - 1$، كما في الخطوات السابقة. ويتبع ذلك أن الحسابات قد وصلت إلى نمط متكرر حيث قيمة n تتراوح ما بين 1، 2:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\cdots}}},$$

أو في الصورة المختصرة كما سبق تقديمها:

$$\sqrt{3} = [1, \dot{1}, \dot{2}]. \qquad (4)$$

بالمثل يمكن حساب مفكوك الكسر المستمر لكل من $\sqrt{7}$، $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{5} = [2, \dot{4}], \qquad \sqrt{7} = [2, \dot{1}, 1, 1, \dot{4}].$$

المفكوك الكسري المستمر لعدد ما يكون غنيًّا بالمعلومات.

الكسور الناتجة من إنهاء المفكوك عند أي خطوة تسمى تقريبات للعدد a. وهي تقترب من العدد a كما يوصي اسمها بإعطاء قيم متبادلة لأعلى وأسفل من تقديرات القيمة الدقيقة. وهي أيضًا لها خصائص أخرى جيدة تسمح، مثلًا باختبار عدم القياسية لأعداد معينة. وكما ذكر سابقًا، المفكوكات المتكررة التي لها البسط واحد تظهر فقط لنوع خاص جدًّا من الأعداد، مع أن بعض الأعداد غير القياسية لها تمثيلات بكسور مستمرة ولها نمط معين، فمثلًا واحدة من تطبيقات واليز ضرب واليز المذكورة في الفصل ٧ هو إثبات أن:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}.$$

ولأننا رأينا في الفصل الثاني أنك تستطيع تحويل أي كسر عشري متكرر إلى كسر اعتيادي، هذا يحفزنا أن نسأل هل يمكننا أم لا يمكننا السفر في الاتجاه العكسي في هذا السياق الجديد، فمثلًا مؤكد أن العدد:

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}},$$

أي $\alpha = [\dot{1}]$ هو حالة خاصة جدًّا. هذا العدد يُسمى: «النسبة الذهبية» ويمكن استخلاصه من مفكوكه الكسري المستمر بسهولة. الشيء الواجب إيضاحه أن ما يظهر أسفل خط القسمة الأولى هو نسخة أخرى من $\alpha = [\dot{1}]$ أي أن α تحقق المعادلة:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}. \qquad (5)$$

بتبسيط المعادلة نحصل على:

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \Longrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \qquad (6)$$

بحل هذه المعادلة بالصيغة التربيعية نحصل على حلين، أحدهما موجب والآخر سالب، ما نطلبه هو الجذر الموجب أي:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

هذا لا يمكن مكافحته شيئًا ما لأننا لدينا إجابة غير ملحوظة المظهر، الكثير سوف يكتشف إذا ركزنا على خصائص الأعداد بدلًا من هذا التعبير لها. علاقة أخرى للعدد α تنشا خلال طرح 1 من طرفي المعادلة (5):

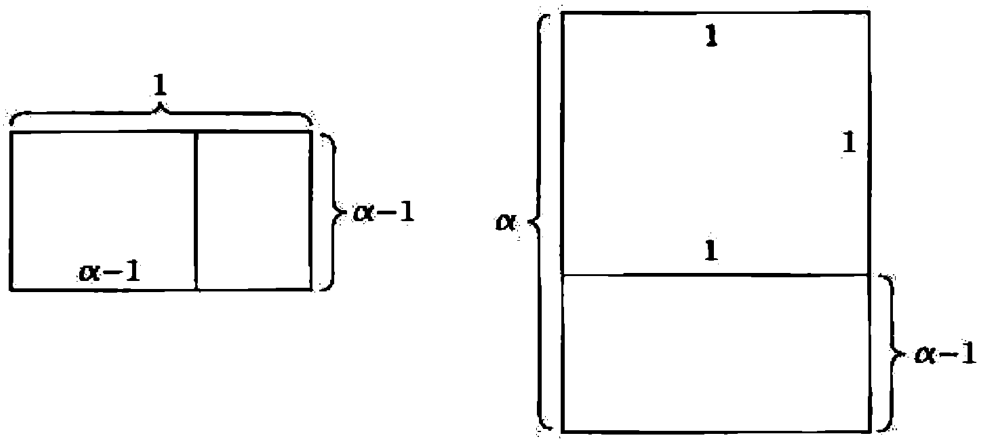
$$\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha}. \qquad (7)$$

ثم بأخذ المعكوس للطرفين نحصل على:

$$\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}. \qquad (8)$$

إذا أخذنا ذلك في الحسبان فإن لدينا مستطيلًا أطوال جوانبه هي α، ا (كما في شكل ١)، وإذا أخذنا أكبر شريحة مربعة ممكنة من المستطيل في الجزء (a) نحصل على مربع 1×1 كما في الشكل والجزء الباقي مستطيل له ضلع طوله الوحدة وضلع قصير طوله $\alpha - 1$ من الوحدات. هذان المستطيلان في الحقيقة متشابهان: إذا نظرنا إلى النسبة بين أضلاعهما فنجدها على الترتيب $\frac{\alpha}{1}$، $\frac{1}{(\alpha-1)}$ والمعادلة (8) توضح أن النسبتين متساويتان؛ لأن المستطيل الصغير له نفس شكل المستطيل الأصلي طبعًا، نستخدم نفس العملية للمستطيل الأصغر (شكل ١(ب))، ونحصل على النتيجة نفسها ويمكن تكرار ذلك إلى ما لا نهاية.

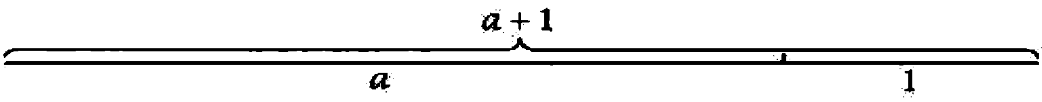
المستطيل بهذا الشكل يسمى: «المستطيل الذهبي»؛ خواصه المهمة كانت مصدرًا للسحر والخيال عند اليونانيين. وخلال بداية القرن السادس عشر ألف باسيولي Pacioli كتاب De divina prorortione عن هذا



شكل ١

الموضوع. ودائمًا يقال إن المستطيل الذهبي هو: مستطيل تريح نسب أضلاعه العين، ولهذا فهو مفيد في التصميمات. لست متأكدًا من هذه النقطة، فمثلًا شكل بطاقة الائتمان القياسية، أبعادها ليست ذهبية مع أنها تقترب من ذلك جدًّا، ومع ذلك فأنا أتوقع أن القراء يمكنهم العثور على أمثلة من المستطيل الذهبي عند العمل في نماذج ورق الحائط والهندسة المعمارية وما شابه ذلك.

هذه العملية لاستخلاص أكبر مستطيل له جوانب ذات الطول a، 1 يقابل بناء التمثيل للعدد a على صورة كسر مستمر. الاستخلاص الأول يقابل كتابة $a = n_1 + r_1$ حيث r_1 هي طول الجانب الأقصر في المستطيل الباقي، الخطوة حيث أعلى وأسفل الكسر الباقي: $\frac{r_1}{(n_2r_1+r_2)} = \frac{r_1}{1}$ تقسم على r_1 يمكن اعتبارها كقياس لباقي المستطيل أي أن الجانب الأقصر في المستطيل وطوله r_1، يعامل الآن على أنه وحدة الطول. كان هذا من المعلوم لقدماء اليونانيين والهنود أنه بأخذ $a = \sqrt{d}$ لأي عدد صحيح d فإنه يوجد اثنان من المستطيلات المتبقية متشابهة وبالتالي فإن الكسر المستمر سيكون من النوع التكراري، مع أن ذلك أثبته لاجرانج Lagrange في القرن الثامن عشر الميلادي بطريقة منطقية.



شكل ٢

هناك وضع هندسي بسيط يعطي فرصة نشوء النسبة الذهبية هو أن نأخذ خطًّا مستقيمًا ونسأل عن قيمة a، بحيث إنه إذا حذف جزء من المستقيم a فإن النسبة a إلى الجزء الباقي هي نفسها نسبة المستقيم الأصلي إلى a نفسه (شكل ٢).

لنفرض أن الجزء الباقي له الطول «1» وبالتالي فإن القطعة المستقيمة الأصلية لها الطول $a + 1$، نحن نطلب أن.

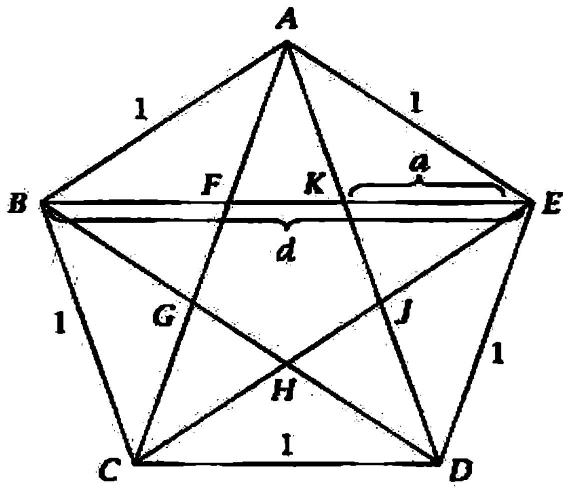
$$\frac{a+1}{a} = \frac{a}{1} \Longrightarrow 1 + \frac{1}{a} = a,$$

ونرى أن a فعلًا تحقق المعادلة (5) التي تُعَيِّن α. في هذا السياق العدد α يُرمز له دائمًا بالجزء الذهبي.

قوة المضلع الخماسي المنتظم

المثال الهندسي الثالث يظهر النسبة الذهبية، α، بشكل لافت من خلال أقطار الخماسي الذي طول ضلعه الوحدة، في الواقع الطول d لأي قطر من هذا الخماسي هو النسبة الذهبية، الخماسي مع أقطاره صور في شكل ٣، هذا ما يصور دائمًا على أنه رمز القوة إذا لم تكن شريرة، الأقطار تعطي الشكل قوته وتخفي تماثله الغامض، فعلينا اختباره على نحو أعمق:

نذكر من الفصل الثالث نظرية الدائرة التي تقول: «إن أي زاويتين محيطيتين يقابلان نفس قوس الدائرة متساويتان.» وبناء عليه لأي مضلع منتظم له n من الأضلاع، أي زاوية من النوع $\angle ACB$ حيث AB ضلع وC رأس لكثير الأضلاع تساوي $(\frac{180}{n})^\circ$ (انظر شكل ١٧ من ذلك الفصل). بتطبيق ذلك على الخماسي نجد أن الزوايا أمثال $\angle BAC$، $\angle CAD$ كلها متساوية $36^\circ = (\frac{180}{5})^\circ$. في نفس الفصل رأينا أن مجموع



شكل ٣

زوايا كثير الأضلاع هي $180° \times (n-2)$، أي أن كلًّا منها لها القياس: $180° \times \frac{n-2}{n}$. في حالة الخماسي حيث $n = 5$ نجد أن الزاوية $\angle BAE$ تساوي $\frac{3}{5} \times 180° = 108°$.

المثلث ABK متساوي الساقين لأن الزاويتين $\angle BAK$، $\angle BKA$ متساويتان وكل منهما $72°$:

$$\angle BAK = \angle BAC + \angle CAD = 36° + 36° = 72°;$$

$\angle ABK = 36°$ وبالتالي:

$$\angle BKA = 180° - \angle BAK - \angle ABK = 180° - 72° - 36° = 72°.$$

وينتج عن ذلك أن الخطين AB، BK كل منهما له وحده الطول وأن القطعة KE التي نرمز لها بالرمز a ترتبط مع القطر بالعلاقة $d = a + 1$.

بعد ذلك المثلثان ABE، AKE متشابهان لأن لهما نفس الزوايا $(108°, 36°, 36°)$ وبالتالي بأخذ نسب الأضلاع المتقابلة نحصل على $\frac{d}{1} = \frac{1}{a}$ أو $ad = 1$. وبالتالي لدينا المعادلات:

$$d = a + 1, \qquad ad = 1.$$

وبضرب طرفي المعادلة في d وبما أن $ad = 1$ نحصل على:

$$d^2 = ad + d = 1 + d$$
$$\Rightarrow d^2 - d - 1 = 0,$$

وهي نفس المعادلة (6) للنسبة الذهبية α أي أن $d = \alpha$. وبالتالي قطر الخماسي له طول يساوي النسبة الذهبية. الأكثر من ذلك أننا اكتشفنا خصائص أخرى لخماسي الأضلاع بما فيها معادلة مهمة هي المعادلة ad 1 هذا يكافئ التقرير أن القطعة المستقيمة BK، ولها الطول «1» هي قطعة ذهبية من القطر BE. ولأن $d = \frac{1}{a}$ نحصل على:

$$\frac{d}{BK} = \frac{d}{1} = \frac{1}{a} = \frac{BK}{a},$$

والتقرير:

$$\frac{d}{BK} = \frac{BK}{a}$$

ويقول بالضبط إن القطعة BK من القطر $BE = d$ هي قطعة ذهبية.

الخلاصة: طول كل القطر في الخماسي هو نسبة ذهبية في حين تتقاطع الأقطار بعضها مع بعض بنسبة القطعة الذهبية.

أرانب فيبوناتشي والنسبة الذهبية

مشكلة أرنب فيبوناتشي ترجع لبداية القرن الثالث عشر، قدمت متتابعة من الأعداد التي ولدت بطريقة بسيطة وطبيعية ومن المحتم أن تنشأ من جديد مرة وأخرى، استمرار ظهورها في الظواهر الطبيعية وبخاصة الحالات التي تحتوي على النمو ليست أقل وضوحًا، الوضع الأصلي لهذا المتتابعة هو المشكلة السكانية الآتية حقًّا:

نبدأ بقاعدة: كل زوج من الأرانب تلد زوجًا آخر في الجيل الثاني وتعطي أيضا زوجًا ثانيًا في الجيل الذي يليه وبعد ذلك تصبح عجوزًا لا تنتج أكثر من ذلك.

الجيل الأول يتكون من زوج منفرد، الجيل الثاني لا يتكون إلا من زوج واحد جديد، لكن في الجيل الثالث يوجد فريقان من الأزواج وُلدوا كمساهمة من الجيل الأول والثاني. الجيل الرابع يوجد لدينا ثلاثة أزواج اثنان منهما أبناء للجيل الثالث والزوج الآخر من الجيل الثاني من الوالدين، الاثنا عشر عددًا الأولى لفيبوناتشي أي عدد الأزواج في كل جيل هي على النحو الآتي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

هل يمكن أن ترى النمط؟ أنت قد لا تكون قادرًا على الأقل مثل المرات التي رأيناها في متتابعات الأعداد التي قابلناها حتى الآن. لا توجد صيغة سهلة تربط f_n، الحد النوني في هذه المتتابعة بالعدد n نفسه (بالرغم من وجود علاقة معُقدة). مع ذلك هذه متتابعة سهلة التوليد بسبب الملاحظة التالية: لتكن f_n عدد الأرانب التي ولدت في الجيل النوني، والأجيال التي تستطيع المساهمة في الولادة لأي جيل معين هي الجيلان السابقان له، كل زوج وُلد في الجيل الذي ترتيبه $n - 2$، ومنه يوجد f_{n-2} من الأزواج، وكل زوج من الجيل التالي الذي ترتيبه $n - 1$ لديه f_{n-1} زوج من السكان تسهم بزوج واحد في الجيل الذي ترتيبه n، فنستطيع القول إن:

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

هذا مؤكد يسمح لك بحساب أعداد فيبوناتشي بسهولة جدًا. (تحقق من ذلك بنفسك في الأعداد 12 الأولى) مع أن هذه الطريقة تعرف باسم التكرار فهي ليست صيغة — لإيجاد f_{100} توجد جميع الأعداد السابقة أولًا (أي يجب أن توجد f_{99} أولًا).

أين تكمن الصلة مع النسبة الذهبية؟ يبدو أنها غير موجودة على الإطلاق. متتابعة فيبوناتشي طبعًا ليست متتابعة هندسية لأن النسبة بين الحدود المتتالية ليست ثابتة، ويمكن اختبارها، وبقليل من المثابرة نحصل على المكافأة: فإذا حسبت خارج القسمة $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ لقيم كثيرة للعدد n ستلاحظ شيئًا رائعًا: فمع أن أي نسبتين غير متساويتين فإنه بعد وقت ستجدها

متساوية تقريبًا، وإذا كنت أكثر مهارة حقًّا فستلاحظ أن القيمة التي تتقارب إليها هي حوالي ...1.618، النسبة الذهبية. متتابعة فيبوناتشي تتصرف على المدى الطويل مثل متتابعة هندسية حيث الأساس α ماذا ينبغي أن يكون هذا؟

في الحقيقة، عندما تشك أن هذا صحيح، فيتحول الأمر ليكون سهلًا بما يكفي للشرح واكتشاف التكرار المكون له، بأخذ: $n \geq 3$ نبدأ بالمعادلة $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ثم نقسم على f_{n-1} فنحصل على:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}.$$

نكتب $f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-3}$ لنحصل على

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-2} + f_{n-3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-3}}{f_{n-2}}},$$

حيث قسمنا الأعلى والأسفل بالقيمة f_{n-2} لنحصل على المتساوية الأخيرة. نستمر بالتعويض عن f_{n-2} بواسطة $f_{n-3} + f_{n-4}$ ثم نقسم مرة أخرى أعلى وأسفل الكسر الناتج بواسطة f_{n-3} فنحصل على:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-4}}{f_{n-3}}}}.$$

من خلال الاستمرار على هذا النحو في نهاية المطاف سنتوصل إلى كسر مستمر محدود يتكون من الواحد كنسبة فيبوناتشي النهائية هي $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1$ ونستنتج أن نسب أعداد فيبوناتشي المتتالية تقابل المفكوك المقتطع الكسري المستمر للنسبة الذهبية α كما في (5). القيمة النهائية لهذه النسبة هي α نفسها وبالتالي قيمة النسبة $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ تؤول إلى α لقيم n الكبيرة.

لأجل خاطر فضولية القراء سوف أنهي هذا الجزء من المناقشة بتقرير غير معقول الصيغة لعدد فيبوناتشي النوني وهو:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \qquad (9)$$

هذا حقيقة مخيفة عند رؤيتك لها لأول مرة. على كل حال لا يوجد سبب واضح لماذا الوحش في الطرف الأيمن يتحول إلى عدد صحيح؟ لا تقلق أبدًا فهذا هو العدد النوني لفيبوناتشي. على أية حال سوف تلمح باطمئنان وجود النسبة الذهبية في الصيغة. في الحقيقة سوف نرى جذري المربع الذهبي $x^2 = x + 1$ لندعو هذه الجذور α، النسبة الذهبية، $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

هذه الصيغة يمكن تحقيقها عن طريق حجة الاستنتاج. سوف نختبر أن الصيغة تعمل لقيمة $n = 1,2$ ثم باستخدام تكرار فيبوناتشي نرى أن الصيغة صحيحة عند كل خطوة. الحجة واضحة بما فيه الكفاية وتستخدم حقيقة أن كلًّا من العددين α، β لهما أهمية خاصة أنهما يحققان المعادلة التربيعية $x^2 = x + 1$. على أية حال لن يفيد شرح كيف اكتشفت هذه الصيغة في المقام الأول. اطمئن توجد تقنية قياسية لإيجاد صيغ لكل تكرارات من نوع فيبوناتشي حيث تأخذ هذه المشكلة في جانبها.

ما استخدام مثل هذه الصيغة غير المريحة في أي حال؟ لا تستخدم لحساب أعداد فيبوناتشي — إذا رغبت في إيجاد f_{100} فالأفضل استخدام التكرار مرارًا بدلًا من المصارعة مباشرة مع هذه الصيغة. لها استخدام نظري، على أية حال. ومع عدم إعطاء التفاصيل هنا فإن الأمر بسيط باستخدام الصيغة إثبات أن النسبة $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ تؤول إلى النسبة الذهبية عند n الكبيرة.

متتابعة بابل

بعد ذلك لديّ نوع مختلف تمامًا من ظاهرة فيبوناتشي؛ ابدأ بحرفين J وP واجعلهما أول «كلمتين» في متتابعة من الكلمات تكونت من طراز قانون فيبوناتشي: كل كلمة في المتتابعة تكونت بلصق الكلمتين السابقتين في كلمة واحدة، المتتابعة تبدأ هكذا:

$$J, P, JP, PJP, JP^2JP, PJPJP^2JP, JP^2JP^2JPJP^2JP, \dots,$$

حيث P^2 هي PP، صادفت هذه المتتابعة لأول مرة بطريقة تافهة مستوحاة من اسم البابا يوحنا بولس Pope John Paul عام ١٩٧٨؛ فالبابا اتخذ اسمه

من اسمي اثنين من أسلافه السابقين بهذه الطريقة. المتتابعة بابل السابقة ستكون هي النتيجة إذا اضطر خلفاؤه أن يصنعوا مثله. على أية حال، منذ ذلك أصبحت متأكدًا أن هذه المتتابعة تنشأ طبيعيًّا في ميادين متنوعة؛ مثل نظرية اللغات المجردة في علوم الحاسب ودراسة البلورات. سوف أعطي وصفًا فقط لبعض أوجه الاهتمام بهذه المتتابعة من الكلمات مع النظر إلى وصف منطقي للاسم P_n للبابا الذي ترتيبه n:

إذا بدأنا ترقيم المتتابعة عن طريق أخذ الكلمة الأولى لتكون JP (بالنظر إلى J وP كمولدات) فيمكننا بسهولة رؤية عدد Js في الكلمة النونية P_n هو العدد النوني لفيبوناتشي f_n، بينما أعداد Ps في P_n هي فعلًا f_{n+1}، طول P_n يصبح $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. أيضًا لا توجد صعوبة لرؤية إذا كان $m \leq n$ فإن P_n تنتهي في P_m، لأن الكلمات في متتابعة بابل تنتهي دائمًا بـ JP ولا تبدأ أبدًا بـ P^2 (هي تبدأ بالتوالي بـ JP ثم PJ) نجد أنه لا توجد P_n يمكن أن تحتوي اثنين متتاليين من Js أو ثلاثة متتابعات من Ps.

لنرمز لعكس P_n بالرمز P_n^*، يمكننا تعريف متتابعة لا نهائية من الحروف A باعتبار الترتيب العكسي لمتتابعة بابل:

$$A = PJP^2JPJP^2JP^2JP\ldots$$

هذا له معنى، لأن عكس (من اليمين إلى اليسار) متتابعة بابل مستقرة بمعنى أنه لأي عدد صحيح k فإن k من الحروف الأخيرة للكلمات في متتابعة بابل هي دائمًا نفسها من نقطة ما في المتتابعة فصاعدًا.

إذا استطعنا توليد هذه المتتابعة A، فيمكننا إيجاد الاسم P_n: سوف نأخذ فقط الحروف f_{n+2} الأولى من A وسوف يعطي هذا P_n^*.

من الأسهل الاستمرار بتشفير حروف A بالأعداد 0، 1، 2، حيث 0 بدلًا من J، 1 بدلًا من P، 2 بدلًا من P^2. المتتابعة A تتكون إذن من 1s، 2s منفصلة بـ 0s. أكثر من ذلك نفرض أن 00 لا يمكن حدوثها وأن A تبدأ

بـ ـ 1. في ضوء هذه الملحوظات يمكن إعادة تكوين A إذا علمنا نموذج توليد 1s، 2s. لتكن B هي المتتابعة المستنتجة من A بحذف جميع الأصفار. فنجد أن B يمكن أن تتولد باستخدام قاعدتين بسيطتين.

لتكن B_0 متتابعة مكونة فقط من الرمز 1. ثم نكوّن أيضًا متتابعات $B_1, B_2, \ldots$ مستخدمين قواعد إعادة الكتابة:

$$1 \longrightarrow 12, \qquad 2 \longrightarrow 122.$$

هذا يعني عند رؤيتنا 1 نستبدله بالرمز 12، عند رؤيتنا 2 نستبدله بالرمز 122. الأربعة الأولى من هذه B_is هي:

$$B_1 = 12, \qquad B_2 = 12\,122, \qquad B_3 = 12\,122\,12\,122\,122,$$

$$B_4 = 12\,122\,12\,122\,122\,12\,122\,12\,122\,122\,12\,122\,122.$$

المتتابعة B_i تحمل المعلومات التي تسمح باكتشاف اسم البابا الذي ترتيبه $2i + 1$. فمثلًا للحصول على P_7 نحتاج B_3 أي: $B_3 = 1212212122122$ الوصفة كالآتي:

احتفظ بالكلمة B_3، وأدخل 0 عند البداية وبين كل زوج من الرموز 1، 2 وأخيرًا ارجع إلى J, P, P^2 لتكتشف الاسم:

$$B_3^* = 2212212122121 \longrightarrow 02020102020102010202010201$$

أي

$$P_7 = JP^2JP^2JPJP^2JP^2JPJP^2JPJP^2JP^2JPJP^2JP.$$

الأجسام الخمسة المنتظمة والنسبة الذهبية

نقترب من مثال من العصور القديمة، مع أن الصلة مع النسبة الذهبية كان نتاج الرياضيات في عصر النهضة:

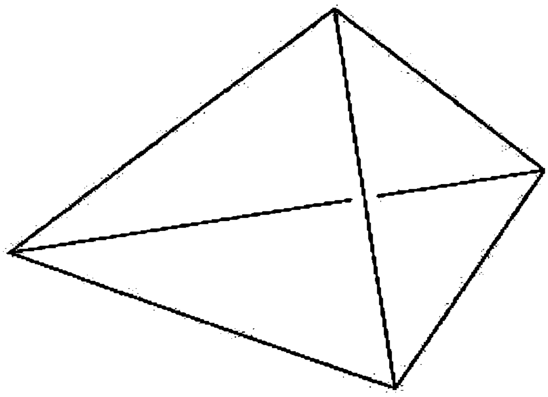
ثلاثي الأبعاد المناظر لمتعدد الأضلاع المنتظم هو متعدد السطوح المنتظم، وهو شكل محدود بمضلعات منتظمة متطابقة حيث عدد السطوح متساوٍ عند أي ركن. فمثلًا، المكعب هو متعدد سطوح منتظم له وجوه مربعة الشكل. بالطبع يمكن إيجاد كثيرات أضلاع منتظمة بأي عدد من الجوانب، لكن متعدد السطوح أكثر ندرة، في الحقيقة يوجد فقط «5» منها.

كم عدد متعددات السطوح التي يمكن تخيل وجودها ويمكن تصور سطوحه كمثلثات متساوية الأضلاع؟ عند كل ركن من أركان متعدد السطوح هذا قد يوجد مثلثات متقابلة ثلاثة أو أربعة أو خمسة لكن لا يمكن أن يكون العدد 6 مثلثات لأن ذلك سوف يعطي زاوية مجتمعة مقدارها $6 \times 60° = 360°$ ويكون الركن مستويًا. (عدد سطوح أكثر من 6 المثلثات متساوية الأضلاع عند الركن يكون خارج المناقشة).

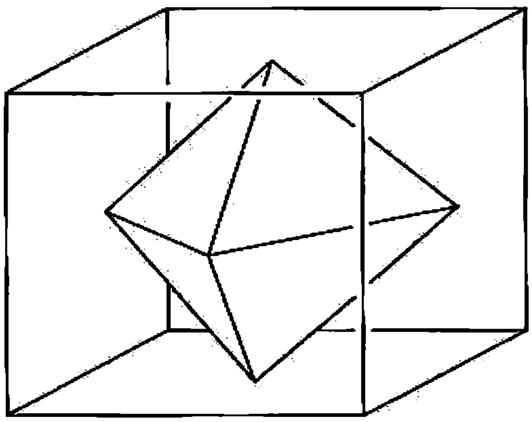
باستخدام المربعات رأينا أنه يمكن أن يكون لدينا ثلاث مربعات متقابلة في كل ركن ويعطي هذا مكعبًا، لكن أيضا أربع مربعات سوف تؤدي إلى رأس مستوية وأكثر من ذلك مستحيل. الزاوية الداخلية للخماسي المنتظم هي 108°، ويبدو أنه من الممكن تكوين متعدد السطوح المنتظم باستخدام خماسيات متطابقة للسطوح باستخدام ثلاثة تتقابل عند كل ركن ولا أكثر من ثلاثة.

سداسي الأسطح مستحيل لأن زاويته الداخلية هي 120° وبالتالي تقابل ثلاثة منها عند الركن يحدث فقط في المستوى، والأكثر من ذلك غير ممكن. أما متعدد السطوح بسبعة أو أكثر من الجوانب فواضح أنه لا يوجد أمل في وجوده لأن الزوايا الداخلية لهذا المضلع تزيد عن 120°.

هل هذه الاحتمالات الخمسة حقيقية؟ لنختبر الحالات الثلاث حيث المثلثات المتساوية الأضلاع مشتركة. متعدد السطوح حيث ثلاثة مثلثات متساوية الأضلاع تتقابل عند كل ركن مشهورة تمامًا، هي رباعية الأسطح أو الهرم الثلاثي كما في (شكل ٤). أربعة ممكن أن تتقابل عند الرأس وفي الحقيقة هذا المجسم يمكن أن يتكون من المكعبات بوصل المراكز لأسطح المكعب التي تشترك في نفس الحرف، والنتيجة هي ثماني الأسطح



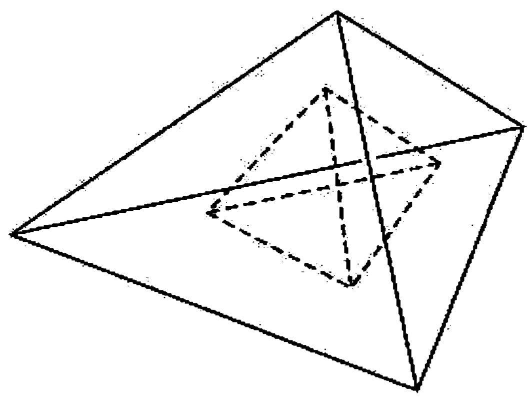
شكل ٤



شكل ٥

(شكل ٥). نقول إن ثماني الأسطح هو كثير السطوح المزدوج (المرافق) للمكعب (الازدواجية هي طريق باتجاهين إذا أوصلنا مراكز الأوجه في ثماني السطوح حيث هذه الأوجه لها أحرف متصلة فإن النتيجة هي مكعب).

قد يحاول المنتبهون منكم لطريقة تفكير علماء الرياضيات فعل شيء أكثر في هذه المرافقة (الازدواجية)، فهل يمكن أن نحصل على مجسم منتظم بالحصول على مرافق لرباعي الأسطح؟ الإجابة نعم، لكن المخيب للآمال ربما يكون أن رباعي الأسطح هو المرافق لنفسه: بإيصال مراكز الأسطح لرباعي أسطح نحصل فقط على رباعي أسطح آخر داخل الأول (شكل ٦).



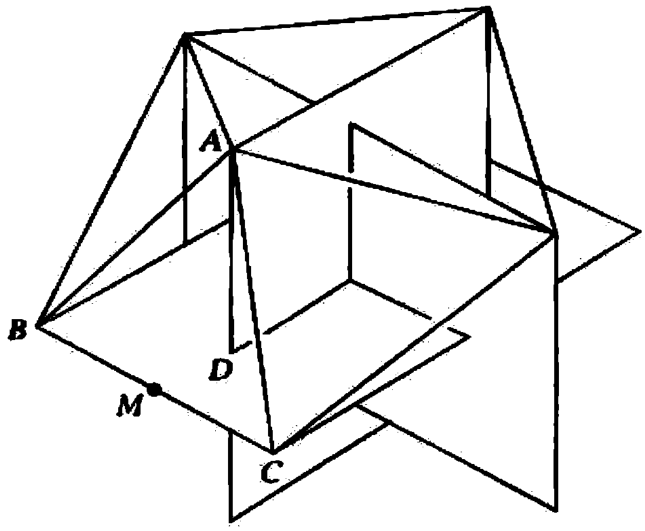
شكل ٦

احتفظ بهذه الفكرة على أية حال. مع أن الخمسة أجسام المنتظمة كانت أشياء رياضية أخذت مكان الصدارة في أعمال إقليدس وكان لوكا باكيولي صديق ليوناردو دافنشي هو الذي وجد بمهارة طريقة بناء الأجسام المنتظمة التي تتقابل فيها خمسة مثلثات برءوسها، ما علينا إلا اعتبار تقاطع ثلاثة مستطيلات ذهبية كما في الصورة التي ظهرت في كتاب ستيلويلز Stilwells العبقري الرياضيات وتاريخها (شكل ٧).

الأركان الاثنا عشر تُكوِّن مجسمًا له 20 سطحًا مثلثيًّا وعند كل ركن خمسة أوجه تتقابل. لقد رُسمت خمسة مثلثات متساوية الأضلاع مرتبطة صراحة بزاوية واحدة في الصورة، ولأن كل مثلث يحتوي ثلاثة أركان كرءوسه، يمكننا رؤية أن المجسم الناتج لديه $20 = \frac{(12\times5)}{3}$ وجه مثلث الشكل.

يبقى التأكد أن كل هذه المثلثات متساوية الأضلاع: في الحقيقة الطول الجانبي للمثلث النموذجي ABC هو «1» كما يكشف تطبيقان لفيثاغورث. نضع في اعتبارنا أنه لكل مستطيل جانبه الأقصر طوله 1 بينما الجانب الأطول طوله α، النسبة الذهبية، وأن α لها الخاصية أن $\alpha^2 = 1 + \alpha$. لتكن M هي نقطة المنتصف للجانب BC وD نقطة حيث المستطيلان التي تعرف أركانها المثلث ABC تتقابل كما في الشكل ٧ من فيثاغورث نحصل على:

$$AM^2 = MD^2 + AD^2.$$



شكل ٧

فيكون: $MD = \frac{(\alpha-1)}{2}$، $AD = \frac{\alpha}{2}$. ولذلك:

$$(\alpha - 1)^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha + 1 - 2\alpha + 1 = 2 - \alpha.$$

ولهذا نحصل على:

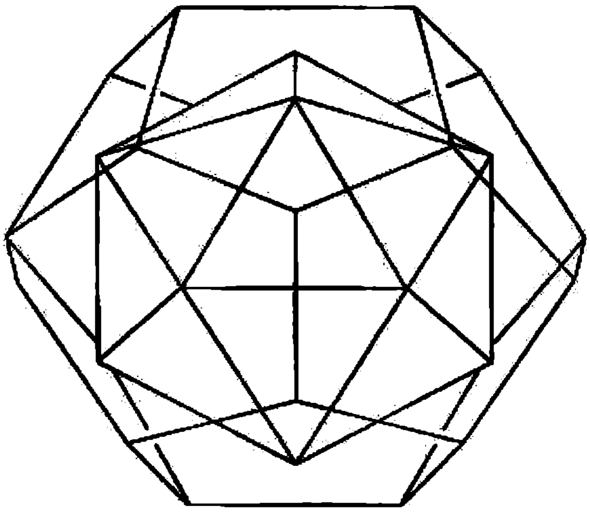
$$AM^2 = MD^2 + AD^2 = \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{2 - \alpha}{4} + \frac{1 + \alpha}{4} = \frac{3}{4}.$$

وباستخدام نظرية فيثاغورث مرة ثانية نحصل على

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

أي أن AB له الطول وحدة واحدة كما هو الحال لباقي أضلاع المثلثات في الصورة. أي أن المثلثات متساوية الأضلاع للمجسم المنتظم المكون من 20 مثلثًا متساوي الأضلاع يسمى عشريني الوجه.

للحصول على المجسم المنتظم الخامس والأخير نعود لفكرة الازدواجية (المرافقة). المكعب له ستة أوجه وبالتالي المرافق (المزدوج) له المجسم الثماني



شكل ٨

له ٨ أركان، واحد لكل وجه من المكعب والأوجه هي مثلثات متساوية الأضلاع لأن المكعب له ثلاثة أوجه تتقابل عند كل من أركانه. وبنفس الطريقة فإن المرافق (المزدوج) لعشريني الوجه يعرف باسم: «المجسم ذو الاثني عشر وجهًا» وله ركن لكل وجه من المجسم العشريني أي أن هناك 20 ركنًا، لأن كل خمسة أوجه تتقابل عند كل ركن من المجسم العشريني الوجه، هذا يسبب أن وجوه الشكل المرافق يجب أن تكون لها خمسة جوانب لكل منها حتى يكون المجسم الاثنا عشري مجسمًا منتظمًا خماسي الوجه. كل وجه من المجسم العشريني يتصل بثلاثة آخرين أي أن ثلاثة وجوه (سطوح) للاثني عشري المجسم تتقابل عند كل من أركانه. الزوج النهائي المرافق للمجسمات المنتظمة صور في (شكل ٨).

ولذلك نرى أنه يوجد خمسة مجسمات منتظمة، مع أنه لا يزال هناك تصور بوجود أكثر من ذلك. مثلًا كيف نعلم أنه لا يوجد مجسم منتظم آخر له خمسة أوجه مثلثية تتقابل عند كل رأس وعدد مختلف من الأحرف والأوجه أكثر من المجسم العشريني الوجه؟ لماذا لا يوجد مثل هذا الشيء سوف نوضحه في الفصل النهائي.

الفصل العاشر

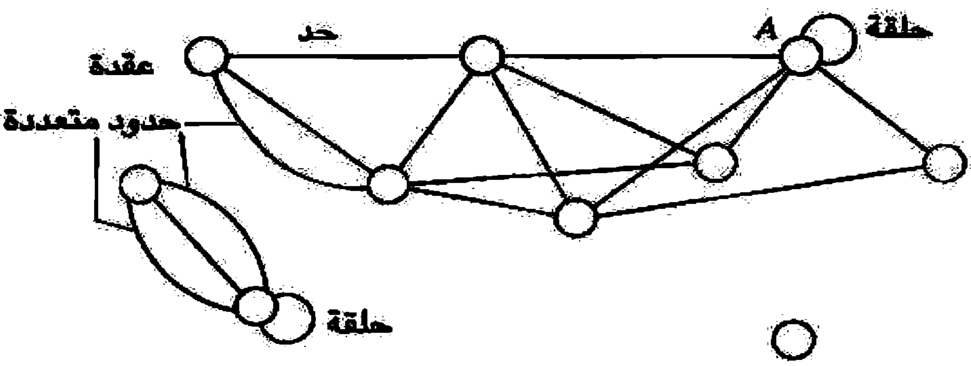
الشبكات

في المشكلة التاسعة من الفصل السادس رأينا أن شبكة جسور كونيجزبرج Königsberg لا يمكن عبورها مرة ومرة واحدة فقط لأن هذه الشبكة بها عديد من النقط الفردية، أي العُقد (النقط) المتصلة بعدد فردي من الأحرف، وسننظر إلى هذا النوع من المشاكل بشكل عام:

الشبكة تعني أي تجمع من العُقد (تسمى أحيانًا رءوسًا وأحيانًا أخرى مجرد نقط) وأحرف تصل بين هذه العُقد. سوف نسمح للعديد من الأحرف أن تربط بين نفس الزوج من العُقد (عديد الأحرف) والحلقات، وهي أحرف تبدأ وتنتهي عند نفس العُقدة ليست ممنوعة. علاوة على ذلك في الحالة العامة الشبكة ليس من الضروري أن تتكون من قطعة واحدة متصلة لكن يمكن أن تتكون من عدد من المُركبات. أحرف الشبكة قد تمر بعضها ببعض وطبعًا إذا وجدت حوافّ كثيرة لا يمكن أحيانًا الهروب منها. على أية حال إذا أمكننا رسم الشبكة دون عبور الحواف بعضها ببعض تسمى شبكة مستوية. كل هذه الميزات يمكن رؤيتها في (الشكل ١).

هناك ملاحظة واحدة تتحقق للكثير من الشبكات بصفة عامة. عدد الأحرف التي تتلاقى العُقدة يسمى بدرجة العُقدة (الحلقة تحسب مرتين).

فمثلًا العُقدة A في المثال السابق لها الدرجة 6. إذا جمعنا كل درجات العُقد في الشبكة نحصل على عدد s يساوي بالضبط ضعف عدد الأحرف e، لأن كل حرف يساهم بـ 2 في المجموع الكلي مرة لكل من نهايتيه. في مثال



شكل ١

(شكل ١) عدد الأحرف 18 لكن بجمع درجات الأحرف لكل من مركباتها نحصل على:

$$(3+5+6+5+4+3+2)+(3+5)+0=28+8+0$$
$$=36=2\times 18,$$

أي تتفق مع ملاحظتنا أن: $s=2e$

لنكتب s_e لمجموع درجات كل العُقد الزوجية (أي عُقد ذات درجة زوجية) وكذلك s_o لمجموع درجات العُقد الفردية فيكون:

$$s_e+s_o=s=2e.$$

فنحصل على $s_o=2e-s_e$. الآن s_e مجموع أعداد زوجية فهي أيضًا عدد زوجي كما في حالة $2e$، وبالتالي فإن s_o عدد زوجي أيضًا. لأن s_o هي مجموع أعداد فردية، وهذا غير ممكن إلا إذا كان عدد الأعداد في المجموع s_o هو أيضًا عدد زوجي، أي نقول إن العدد الفعلي للعُقد الفردية في الشبكة يجب أن يكون عددًا زوجيًا. ونستنتج من ذلك أن أي شبكة بها عدد زوجي من العُقد ذات الدرجة الفردية (في المثال السابق له 6 عُقد فردية) هذه الحقيقة تسمى أحيانًا (تمهيدية المصافحة) (hand-shaking lemma) وهي مفيدة للغاية. ومن المهم أن نقدر أنها صحيحة. فمثلا هي تخبرنا أنه من المستحيل تكوين

شبكة من 5 عُقد حيث كل عُقدة من الدرجة الثالثة. إذا حاولت فسترى حالاً أن تمهيدية المصافحة تعمل على إحباط جهودك.

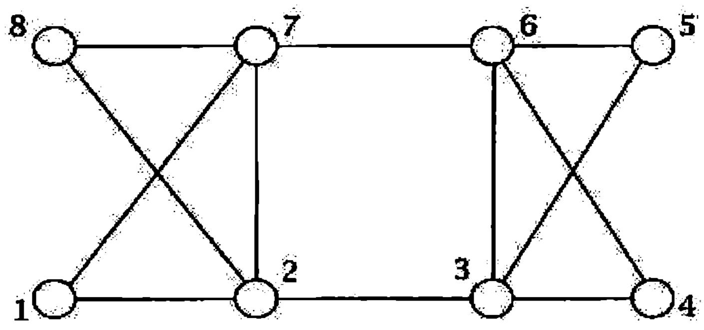
إعادة النظر في مسألة كونجيزبرج

سوف نبحث الآن في سؤال عبور الشبكة وهي مسألة إيجاد مسار حول الشبكة يعبر كل حرف مرة واحدة فقط.

الحجة التي قدمناها فيما يخص جسر كونجيزبرج königsberg bridges توضح أنه لعبور الشبكة *N*، يجب أن يكون بها على الأكثر عُقدتان فرديتان عند كل من طرفي مسار العبور. إذا تطلعنا أكثر لعبور دائري، أي أن المسار يبدأ وينتهي عند نفس العُقدة، فإن حجة التزاوج (الثنائية) في (الفصل ٦) توضح أن ذلك سيكون مستحيلًا إلا إذا كانت كل العُقد زوجية الدرجة. (الدائرة يجب أن تصل وتغادر أي عُقدة عددًا متساويًا من المرات وبالتالي يجب أن يكون عدد الأحرف المرتبطة بالعُقد زوجيًّا). تبين أن هذا الشرط ضروري وهو أيضًا لازم لعبور الشبكة المتصلة *N*: «*N* يمكن عبورها إذا — وفقط إذا — كانت جميع العُقد زوجية» (من الواضح أننا لا نملك الأمل في عبور الشبكة غير المتصلة).

هل يمكن أن نجد طريقة للقيام بذلك فعلًا؟ هل سيحدث أي شيء؟ ربما إذا كان لدينا مثل الشبكة *N* ويمكننا السير حولها بأي شكل، باستخدام حرف جديد في كل منعطف، وفي نهاية الأمر نجد أنفسنا حيث بدأنا بعد استخدام جميع الأحرف، هذا النهج بسيط في التفكير ولا يصلح دائمًا؛ فإذا لم تكن دقيقًا فستصبح في مأزق.

خذ المثال التالي (شكل ٢): هذه شبكة متصلة كل عُقدة بها من درجة زوجية. ومع ذلك إذا كانت البداية عند العُقدة 7 وكان المسار 2 – 3 – 6 – 7، فإننا نهبط في مأزق. إذا كان لنا أن نتصور حرق الجسور التي مشينا عليها، فلدى وصولنا إلى 2 فإن الشبكة المتبقية تنقسم إلى مركبتين، ونحن قد حصرنا أنفسنا على الجانب الأيسر. ومع ذلك فهذه هي الصعوبة الوحيدة التي تنشأ ويمكن تفاديها بسهولة. لا يجب أن نكون في



شكل ٢

منتهى المهارة عندما نحدد مسارنا ولا يجب أن نفكر مرتين مقدمًا، نحتاج فقط إلى تجنب اتخاذ خطوة تؤدي إلى انقسام الشبكة المتبقية إلى اثنين. يمكننا فعلًا إعطاء خوارزمية لعمل ذلك، أي طريقة ميكانيكية تتجنب ضرورة للحكم الحقيقي أو الاستخبارات (الذكاء).

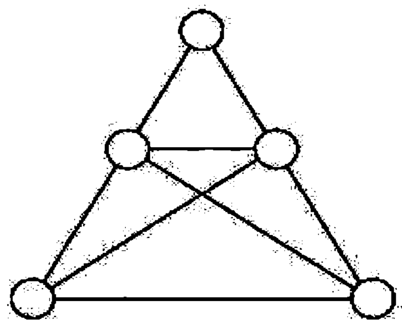
تبدأ عند أي عُقدة لعبور الشبكة أي طريق ترغب، لكن:

(١) ارسم صورة للشبكة واحذف أي حرف استخدمته وأي عُقدة عُبِرَت كل الأحرف المتصلة بها.

(٢) في كل خطوة استخدم وسيلة توصيل Isthmus أي حرف يصل جزأين غير متصلين من باقي الشبكة فقط إذا كان لا يوجد أي اختيار آخر.

لن تجد الآن أي صعوبة في عبور الشبكة السابقة، مبتدءًا عند أي عُقده تسعدك. (لاحظ أن الخطوة الثالثة 2 ← 3، من خطة العبور الفاشلة تنتهك القاعدة 2 عن طريق عبور وسيلة التوصيل).

إذا كانت الشبكة المتصلة بها عدد فردي من العُقد فإنه يجب، عن طريق «تمهيديه المصافحة» أن يكون عدد العُقد على الأقل 2. إذا كان هناك أكثر من اثنين نعلم أنه لا يوجد مسار للمشي، لكن ماذا لو كان هناك بالضبط عُقدتان فرديتان؟ هل يمكن استخدام الطريقة السابقة للحصول على مسار للمشي حتى لو لم يكن دائريًّا؟



شكل ٣

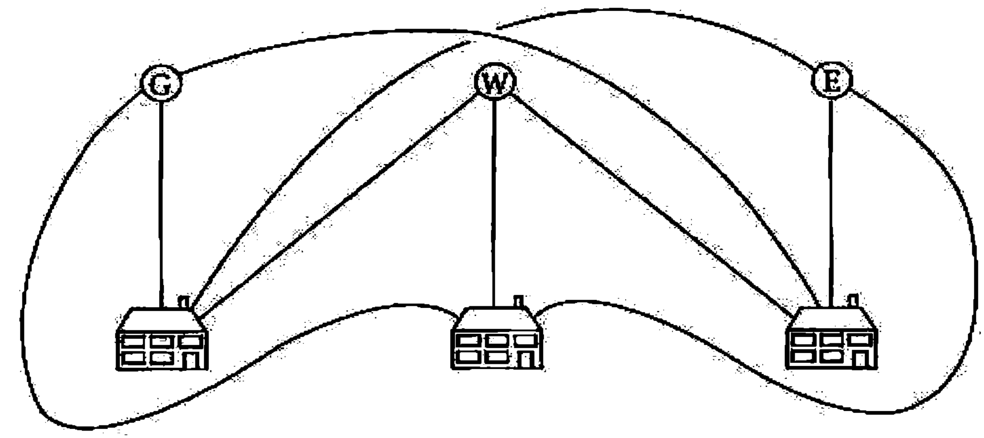
الإجابة: نعم، وسوف نشرح الآن.

يمكن أن نعبر الشبكة مبتدئين عند أي من العُقدتين الفرديتين ومنتهين عند الأخرى، لتسمى العُقدتين الفرديتين A، B على الترتيب. ارسم حرف آخر e في الشبكة من A إلى B. في هذه الشبكة المعدلة حتى الآن جميع العُقد زوجية الدرجة وبالتالي الخوارزمية السابقة تسمح لنا بإيجاد دائرة للعبور، بدءًا من B. ويمكن أيضًا الإصرار على أن يكون الحرف الجديد e الذي أضفناه هو الأول في الاستخدام. وبالتالي هذه الدائرة تتكون بالسير من B إلى A خلال e والباقي يجب أن يكون المشي عبورًا للشبكة الأصلية التي تبدأ عند A وتنتهي عند B. جرب على المثال التالي الذي يتكون من 2 من العُقد الفردية كما في (الشكل ٣).

البرهان أن الخوارزمية السابقة تعمل دائمًا (قلت فقط إنها تعمل) يمكن إيجاده في أي كتاب جاد عن الشبكات ونظرية الرسوم، حيث دراسة الشبكات دائمًا تسمى كذلك. البرهان لا صعب ولا طويل ولكن مرعج قليلًا إذا أصررت على تبرير كل التفاصيل، حيث الكثير من الكتب لا تفضل ذلك حتى لا تفسد البساطة الكامنة في الفكرة.

تقاطع الأسلاك: هل يمكن تفاديها؟

النوع الثاني من المشاكل اللغز التي ترتبط بالشبكات هي عندما يطلب منك رسم شبكة تتعلق بروابط معينة بحيث تكون الأحرف غير متقاطعة. المثال

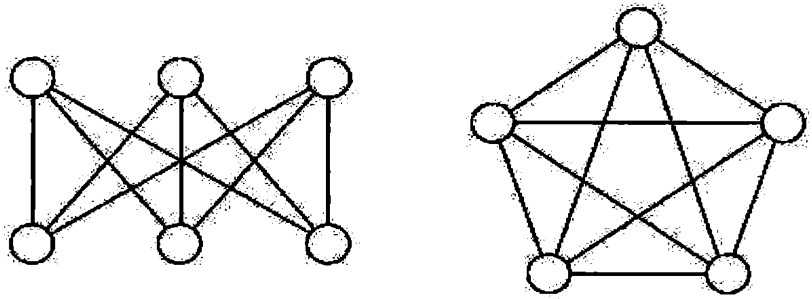


شكل ٤

القياسي هو: يوجد ثلاثة منازل يجب إمدادها بمنافذ للغاز والكهرباء والمياه، بطريقة تقلل إلى أدنى حد قطع إمدادات الخدمات الأخرى أثناء صيانة إحدى الخدمات. سيكون من الأفضل أن تُوضع الوصلات بحيث لا تعبر خطوط إمدادها بعضها فوق بعض، فهل يمكن عمل ذلك؟ شبكة فاشلة تقترب من النجاح موضحة في (شكل ٤).

قد تتمكن من فعل ذلك بنفس القدر ولكن ليس أفضل. كيف يمكنك إثبات أن هذا مستحيل؟ كيف يمكننا التأكد أنه لا توجد طريقة ماهرة لفعل ذلك ونحن لم نتمكن من رؤيتها؟ الصعوبة لا تكمن كثيرًا في كون المسألة معُقدة حقًّا، لكن مهما كانت المبررات في مرحلة ما يحتاج المرء إلى التأكيد على أنه من الواضح أن أحد الأحرف عليه عبور حرف آخر لأنه يجب أن يمر من الداخل إلى الخارج لبعض الأشكال التي أنشأتها الأحرف الأخرى. لا حرج في ذلك ما عدا أنها صعبة جدًّا لتبريرها بصرامة لأنه حتى المنحنيات المغلقة البسيطة صعبة التعامل معها بالتصميم الكامل.

في الحقيقة، توجد شبكتان أساسيتان غير مستوية بمعنى، أنه لا يمكن رسمهما بدون زوج واحد على الأقل من الأحرف تتقابل عند نقطة ليست عُقدة في الشبكة. الأولى التي سبق أن ذكرناها هي $K_{3,3}$ الشبكة التي تنشأ من وصل كل عضو مجموعة واحدة من ثلاث عُقد لمجموعة أخرى من ثلاث عُقد.



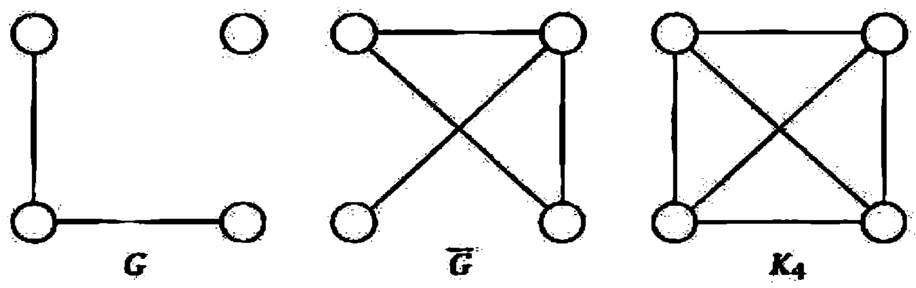
شكل ٥

الثانية هي K_5 التي تسمى الشبكة الكاملة على 5 نقط. الشبكة الكاملة على n عُقدة لها بالضبط حرف واحد يربط بين كل زوج من العُقد (شكل ٥).

لا تكمن أهمية $K_{3,3}$، K_5 في كونها غير مستوية فقط بل في حقيقة أن كل شبكة مستوية إلا إذا احتوت نسخة من واحدة من هذه الشبكات الممنوعة (بمعنى يمكن أن يكون دقيقًا). هذه النظرية، التي يصعب وصفها بدقة وإثباتها، برهنها كوراتوفسكي Kuratowski عام ١٩٣٠. سنتوقف لتوضيح بعض جوانب من الوضع العام قبل أن نكثر من مناقشة الاستواء:

نحن لا نحتاج إلا أن نهتم بالشبكات التي لا تحتوي حلقات أو أحرفًا متعددة، سوف نسمي هذه الشبكات: «شبكات بسيطة». والسبب في ذلك هو أنه إذا كانت الشبكة N مستوية فإن الشبكة البسيطة الأساسية التي نحصل عليها بحذف جميع الحلقات والتحام أي أحرف متعددة بين عُقدتين إلى حرف وحيد بينهما، تكون أيضا مستوية. بالعكس إذا كانت الشبكة البسيطة الأساسية من الشبكة مستوية، فإنه يمكننا استبدال أي حرف وحيد من الشبكة البسيطة الأساسية بالعدد المطلوب من متعدد الأحرف وإضافة أي عدد من الحلقات نرغبها للصورة دون انتهاك للاستواء؛ لذلك إذا كانت الشبكة البسيطة الأساسية مستوية فإن الشبكة نفسها مستوية كذلك.

لقد سبق حل مشكلة حول الشبكات البسيطة في الفصل السادس، حيث رأينا أنه في أي حفلة يوجد على الأقل اثنان من الأفراد لهما نفس عدد الأصدقاء في الحفلة. يمكننا إعادة صياغة هذا السؤال ليصبح عن الشبكات البسيطة: ارسم شبكة لها عُقدة واحدة لكل شخص وارسم حرفًا بين أي

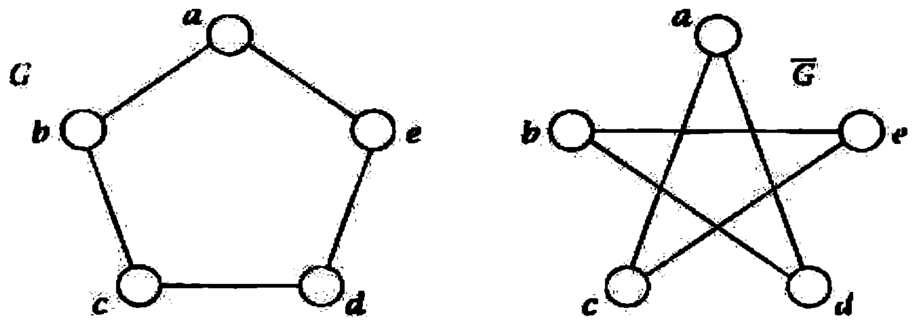


شكل ٦

عُقدتين إذا كانتا تمثلان صديقين. الحجة في الفصل السادس برهنت أنه لأي شبكة بسيطة يجب أن يكون هناك عُقدتان بنفس الدرجة.

هذه فكرة سوف يتكرر ظهورها مرات فيما تبقى من هذا الفصل، هي مكملة الشبكة البسيطة G. لتكن G شبكة بسيطة حيث N ترمز لمجموع العُقد فيها. مكملة G، ويرمز لها $\overline{G}$، هي شبكة بسيطة ولها نفس مجموعة عُقد مثل G، ولكن العُقدتين ترتبطان بحرف $\overline{G}$ فقط عندما لا يكون بينهما حرف في G. ويترتب على ذلك إذا جمعنا G مع المكملة $\overline{G}$ نحصل على الشبكة الكاملة على مجموعة العُقد N. بأخذ مكمل المكمل للشبكة G فإننا طبعًا نعود إلى G مرة أخرى: $\overline{\overline{G}} = G$. (انظر شكل ٦).

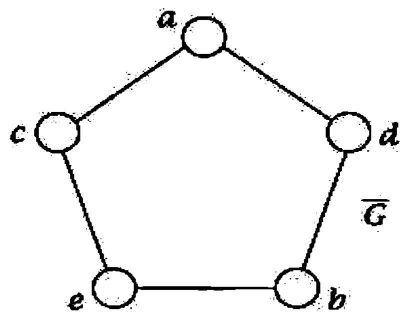
في المسألة الثامنة من الفصل السادس رأينا أنه في حفلة لستة أشخاص أو أكثر يوجد دائمًا مثلث من المعارف المتبادلة أو مثلث من الغرباء بالتبادل. هذه المسألة يمكن صياغتها بعناية بتعاريف الشبكات والشبكات المكملة لها كشبكات من المعارف وشبكات عدم المعرفة وتكمل بعضها بعضًا. تُمَثل أحرف المعرفة المتبادلة بأحرف في G وترمز أحرف $\overline{G}$ إلى عدم المعرفة. المشكلة التي نسأل عنها حقًا هي: لأي شبكة بسيطة G لها على الأقل 6 عُقد فإنه أما G تحتوي نسخة من K_3 (أي مثلث من الأحرف) أو $\overline{G}$ تحتوي K_3. ويمكن ملاحظة ذلك في المثال السابق حيث $\overline{G}$ تحتوي المثلث المطلوب مع أن G لا تحتويه. (طبعا من الممكن تمامًا لكل من G، $\overline{G}$ أن تحتوي مثلثات عديدة).



شكل ٧

مثال تعليمي ينشأ إذا ألقينا نظرة على الشبكة G على 5 عُقد التي يمكن رسمها على شكل خماسي منتظم. وهذه قد سبق أن قابلناها في الفصل السادس لأنها تقدم عند التفكير بها كتمثيل لخمسة من ضيوف للعشاء حول مائدة. مثال عن حفلة حيث لا يوجد مثلث المعرفة أو عدم المعرفة. الشكل الخماسي G لا يتضمن أي مثلث. إذا رسمنا $\overline{G}$ بطريقة واضحة فإن الصورة الناتجة ليست مفيدة (انظر الشكل ٧). الشبكة $\overline{G}$ تبدو أكثر صعوبة من G وهي لا تبدو حتى مستوية حيث الأحرف تعبر بعضها في أماكن كثيرة غير مرغوبة. بالتفتيش عن قرب، على أية حال، نجد أن $\overline{G}$ لها نفس حقيقة تكوين الشبكة G وأيضا تفتقر إلى المثلثات. لتوضيح ذلك لا تحتاج إلا لترتيب الطريق الذي نسجل به العُقد حول خارج الخماسي. بدلًا من أن يكون الترتيب عكس عقارب الساعة a, b, c, d, e نرتبهم a, c, e, b, d، صورة $\overline{G}$ تصبح خماسيًا عاديًا (G تصبح الآن في شكل النجمة) (انظر الشكل ٨).

بالتالي قد تبين أن الشبكات G، $\overline{G}$ مع أنها تمثل علاقات مختلفة، فهي نفسها عند أخذ هيكل الشبكة فقط في الاعتبار. علماء الرياضيات لديهم رأي في ذلك: نقول الشبكتان متشاكلتان إذا أمكن تمثيلهم بنفس الصورة، وهذا يعود إلى القول بوجود تقابل واحد لواحد بين العُقد للشبكتين بحيث إن أي عُقدتين متجاورتين في الرسم البياني الأول (بمعنى أنهما مرتبطتان بحرف) إذا — وفقط إذا — كانت العُقدتان المقابلتان في الرسم البياني الثاني هما أيضًا متجاورتان. وبصفة عامة، قد يكون من الصعب معرفة هل الشبكتان



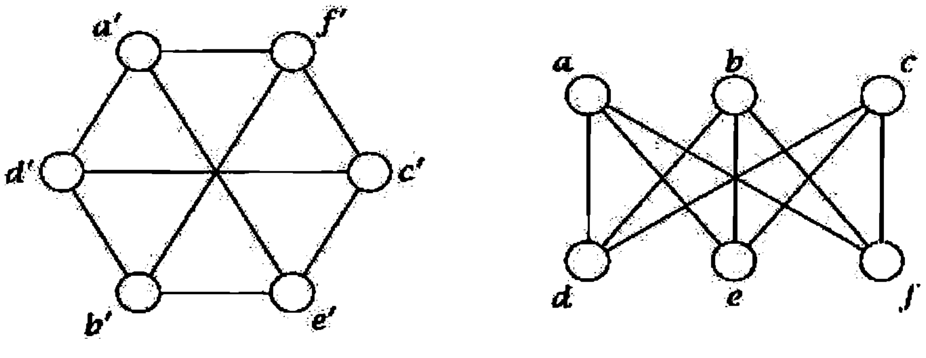
شكل ٨

متشاكلتان أم لا، فمثلا الصورتان في شكل ٩ كل منهما تمثل $K_{3,3}$. تقابل مناسب بين العُقد لتوضيح ذلك:

$$a \longrightarrow a',\ b \longrightarrow b', \ldots$$

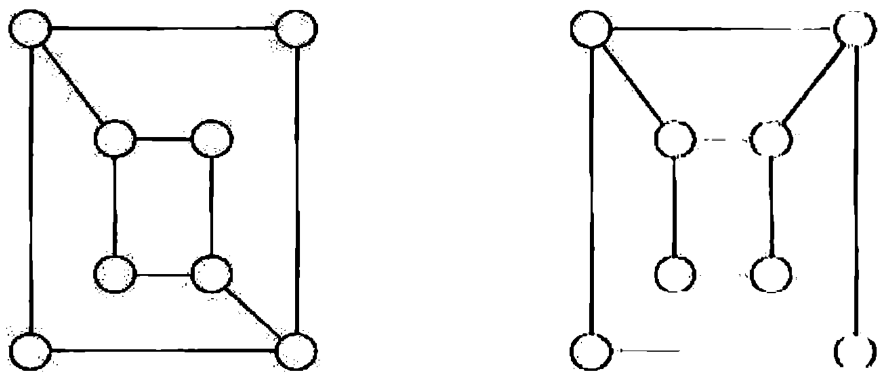
وأترك للقارئ اختبار أن عُقدتين يكونان متجاورتين في الشبكة الأولى إذا — وفقط إذا — كانت نظيرتاها في الشبكة الثانية متجاورتين.

يمكنك تخيل صعوبات التعامل مع الشبكات المعُقدة جدًّا، ومع ذلك فمن السهل أحيانًا اكتشاف أن شبكتين غير متشاكلتين: ما على الشخص إلا رؤية بعض الفرق الأساسي. فمثلًا إذا كانت الشبكات لا تحتوي نفس العدد من العُقد أو نفس العدد من الأحرف، فإنها قطعًا غير متشاكلة. الفرق يمكن أن يكون أكثر مكرًا، يمكن أن نجد عُقدة من الدرجة الرابعة متصلة بعُقدة من الدرجة السادسة، والأخرى لا: إذا كانت هذه هي الحالة فلن تكونا متشاكلتين، فمثلًا رؤية فرق أساسي بين الشبكتين في الشكل ١٠. كل من الشبكتين لديها أربعة عُقد من الدرجة الثالثة، لكن في الشبكة الثانية فإنها تكون دائرية رباعية وهي ليست الحالة في الشبكة الأولى ولهذا السبب فمن غير الممكن وضع علامات على العُقد بالشبكات: $a, b, c, \ldots$ و $a', b', c', \ldots$ بطريقة تحترم التجاور. على أية حال، إذا كان لديك مثال حيث لا يظهر مثل هذا الفرق في الهيكل، فإن مشكلة هل الشبكات متشاكلة أم لا يمكن أن تكون مملة جدًّا.



(ب) (أ)

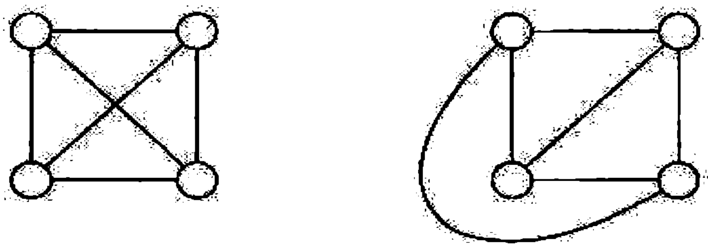
شكل ٩



شكل ١٠

يمكننا الآن توضيح ما نعنيه بالاستواء: الشبكة تكون مستوية إذا أمكن تمثيلها بواسطة شبكة حيث الأحرف لا تتقاطع (شبكة مستوية). شبكة عدم المعرفة السابقة هي مستوية لأنه يمكن تمثيلها بواسطة خماسي. وبعبارة أخرى فإن هذا لا يعني أن الشبكة لا تكون مستوية فقط لأن الصورة الأولى التي رسمتها لها بها العديد من الأحرف المتقاطعة. فمثلًا الشبكة K_4 يمكن رسمها كما في يسار الشكل ١١ لكنها يمكن رؤيتها بسهولة مستوية كما في الصورة البديلة يمين الشكل.

هناك صيغة خاصة تطبق للشبكات المستوية ويمكن استخدامها لتوضح إلى حد ما فكرة أن الشبكة ليست مستوية إذا كان هناك عدد كبير



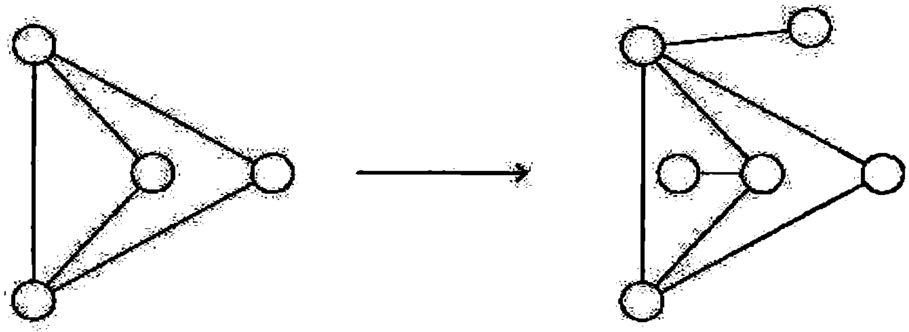
شكل ١١

جدًّا من الأحرف؛ على الأخص هذا يؤدي إلى تفسيرات لماذا تكون الشبكات $K_{3,3}$، K_5 غير مستوية.

أي شبكة تعين بعددين مرافقين لها: n، عدد العُقد وe، عدد الأحرف. لكن نضيف للشبكة المستوية عدد ثالث f، عدد الأوجه للشكل المستوي، حيث الوجه هو منطقة محددة بالأحرف ولا يحتوي أي منطقة أصغر محددة بالأحرف. من المناسب — مع أنه يختلف قليلًا عما سوف تنفذه — عد السطح الخارجي للشبكة المستوية وكأنه وجه آخر. أما النسخة المستوية من K_4 السابقة فنجد أن $n = 4$، $e = 6$ و$f = 4$، هنا f_4 هو الوجه الخارجي. من الواضح أنه في هذه الشبكة المرسومة، العدد n والعدد e سيظلان على حالهما، لكن لن يكون الحال نفسه مع f، هذا صحيح، لأنه لأي شبكة مستوية مترابطة الأعداد الثلاثة تحقق المعادلة البسيطة:

$$n + f = e + 2. \qquad (1)$$

في مثال K_4 نرى أن هذا يتحقق $4 + 4 = 6 + 2$ السبب في تحقق هذه العلاقة في أي شبكة مستوية مترابطة يمكن رؤيته بتخيل أن الشبكة رسم لها حرف واحد في كل مرة، وإضافة أي عُقدة جديدة عند اللزوم، وملاحظة أن المجموع على جانبي المعادلة دائم الصعود والهبوط معًا. عندما نرسم أول حرف يكون دليلنا شبكة مستوية حيث $n = 2$، $e = 1$، $f = 1$. (وجه واحد فقط غير محدود خارج الشبكة)



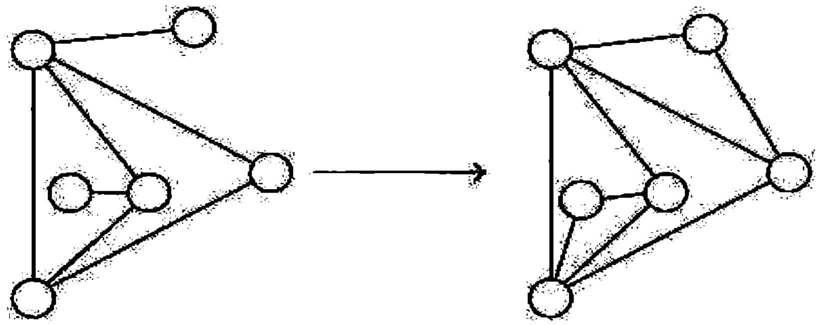
شكل ١٢

وبالتالي المعادلة صحيحة. كلما أضفنا أحرفًا أكثر وُجِدَت حالتان للاختبار، لأن الصورة النهائية مترابطة، يمكن أن يجمعها حرفًا حرفًا، دون الحاجة لرسم حرف آخر غير مرتبط بأي عُقد موجودة أصلًا، مع أن حاجتنا لتقديم عُقدة واحدة جديدة لرسم حرف جديد. توجد حالتان:

(١) رسم حرف يحتوي على تقديم عُقدة جديدة لا تقع على حرف موجود كما في (الشكل ١٢). في هذه الحالة n، e تزداد بمقدار واحد لكل حرف مضاف، وبالتالي المعادلة (١) ما تزال متزنة: في الشبكة الأصلية (١) تأخذ الشكل $2 + 5 = 3 + 4$ تتغير إلى $2 + 7 = 3 + 6$ للشبكة على اليمين التي تكونت بإضافة حرفين جديدين من النوع السابق وصفه.

(٢) رسم حرف لا يحتوي أي عُقد جديدة (شكل ١٣). هذا يسبب زيادة e، f بواحد، لأن الحرف الجديد سوف يقسم الوجه الموجود (ربما يكون الوجه الخارجي) إلى اثنين وهذا يؤدي إلى إضافة واحد لكل من طرفي المعادلة.

في المثال المبين في (شكل ١٣) أُضيف حرفان من هذا النوع؛ واحد منهما قسم الوجه الداخلي إلى اثنين وفعل الآخر ذلك بالنسبة للوجه الخارجي. الصيغة (١) تتغير من $2 + 7 = 3 + 6$ إلى $2 + 9 = 5 + 6$ لكنها ما زالت متزنة.



شكل ١٣

هذا يحقق ما يسمى صيغة متعددة السطوح للشبكات المستوية. يمكننا الآن استغلال هذه الصلة بين n، f، e لتحديد بعض الخواص الاستثنائية التي تتمتع بها الشبكات المستوية.

لنفترض أن لدينا شبكة مستوية بسيطة موصولة. أي مكونة من مركبة واحدة بها f من الوجوه. لنسمي عدد الأحرف التي تحدد وجه باسم عدد الوجه لهذا الوجه ونرمز لهذه المتتابعة من الأعداد بـ $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_f$. إذا جمعنا كل أعداد الوجه فإن كل حرف تم عده مرتين لأن كل حرف هو حد ليس لأكثر من وجهين. (الحرف يمكن أن يكون حدًا لوجه واحد فقط، كما يتضح من واحد من الأحرف في شكل ١٣.) وبالتالي فإن مجموع أعداد الوجه لا يزيد عن ضعف e (العدد الكلي للأحرف في الشبكة):

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_f \leq 2e.$$

الآن لأي شبكة مستوية بسيطة لديها على الأقل 3 أحرف، كل وجه محدود على الأقل بعدد 3 أحرف. كما يمكن أن نجد وجهًا محدودًا بحرفين فقط إذا سمحنا بالأحرف المتعددة، الوجه ذو الحرف الواحد محدود بحلقة وهما ميزات ممنوعة في الشبكات البسيطة. بكلمات أخرى كل عدد وجه على الأقل 3. أي أن:

$$\underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{\text{عدد } f \text{ من المرات}} \leq F_1 + F_2 + \cdots + F_f.$$

بجمع الحقيقتين السابقتين:

$$3f \leq 2e \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}e.$$

باستخدام الصيغة (1) لمتعدد الأسطح:

$$e+2=n+f \leq n+\frac{2}{3}e$$
$$\Rightarrow e+2 \leq n+\frac{2}{3}e \Rightarrow \frac{1}{3}e+2 \leq n.$$

بضرب الطرفين في 3 نحصل على — لأي شبكة مستوية بسيطة من عُقدتين أو أكثر وموصولة:

$$e \leq 3n - 6.$$

هذا لا يؤهل K_5 مباشرة بعيدًا من الدخول في مجال الشبكات المستوية السطحية لأن بها الكثير من الأحرف: بالنسبة K_5 نجد أن $e = 10$، $n = 5$ وبالتالي فإن e تزيد عن $3n - 6 = 9$.

ومع ذلك فإن $K_{3,3}$ هربت لحظيًا من هذه المصفاة، حيث $e = 9$ بينما $n = 6$ وبالتالي فإن القانون $e \leq 3n - 6$ تم اتباعه بواسطة $K_{3,3}$، لكنه على أي حال يستسلم للحجة التالية المشابهة لما قرأناه حالًا. لأن أحرف $K_{3,3}$ دائما تربط بين مجموعتين من ثلاث عُقد (شكل ٩) وبالتالي فإن أي دائرة في الشبكة يجب أن يكون لها طول زوجي، على الأخص لا توجد مثلثات فلأي تمثيل مستوي للشبكة $K_{3,3}$ ستوجد إمكانية واحدة، أن كل وجه محدد على الأقل بأربعة أحرف. هذا يعطي تقريرًا أقوى من السابق، أي أن: $4f \leq 2e$ و $f \leq \frac{e}{2}$. بجمع ذلك مع صيغة متعددة السطوح (1) توضح أنه في أي تمثيل مستوى للشبكة $K_{3,3}$ نحصل على:

$$n+\frac{e}{2} \geq e+2 \Rightarrow \frac{e}{2} \leq n-2 \Rightarrow e \leq 2n-4.$$

ومع ذلك فإن $K_{3,3}$ لا تستطيع تخطي هذه العقبة لأن $e = 9$ وهي أكبر من $2 \times 6 - 4 = 8$.

صيغة متعدد السطوح حقيقة أساسية جدًا في الرياضيات أنها تسمح لنا بإثبات أنه لا K_5 ولا $K_{3,3}$ يمكن رسمهم إلا بتقاطع حرفين على الأقل. السبب أنها أعطيت اسم يطبق على كثير السطوح أي الأشكال المصمتة المحددة بأسطح بشكل متعدد الأضلاع المستوي، شرط أن تكون محدبة أي سطوح متعددة الأضلاع تتقابل على زاوية أقل من 180° (زاوية مستقيمة) مثل متعدد السطوح المنتظم في الفصل السابق. فمثلا في المجسم ذي الاثني عشر سطحًا $n = 20$ ركنًا، $e = 30$ حرفًا، $f = 12$ وجهًا وبالتالي تحقق الصيغة $n + f = e + 2$. ويمكنك التحقق من أن الأجسام الأربعة المنتظمة الأخرى تحقق هذه الصيغة أيضًا.

إذا وافقنا على صيغة متعدد السطوح، فإن من السهل بما يكفي توضيح أنه من الممكن الإجابة على سؤال طرح عند ختام الفصل السابق: هل من الممكن أن يكون هناك مجسم منتظم آخر له خمسة مثلثات متساوية الأضلاع تتقابل عن كل ركن، لكن لديه عدد مختلف من الأحرف والأوجه عن المجسم ذي العشرين وجهًا؟ الإجابة بالتأكيد لا. لأن صيغة متعدد السطوح لا تتحقق. لنفرض أن لدينا مثل هذا المجسم المنتظم حيث عدد الأركان n وعدد الحروف e وعدد الوجوه f. بعد كل الحروف عند كل ركن يعطي $5n$ ولأنه في ذلك يُعد كل حرف مرتين نجد أن $5n = 2e$. بالمثل بعد الأحرف بواسطة الوجوه فإننا نرى لأن كل وجه له ثلاثة أحرف وأن كل حرف يقع على وجهين فإن $3f = 2e$. بمضاعفة صيغة متعدد السطوح بالعدد $3 \times 5 = 15$ يعطي:

$$15n + 15f = 15e + 30 \Rightarrow 6e + 10e = 15e + 30.$$

مما سبق ينتج أن e يجب أن تساوي 30 وبالتالي فإن $n = \frac{2}{5}e = 12$ و$f = \frac{2}{3}e = 20$ ولا توجد قيم أخرى ممكنة.

أكبر الحفلات وأكبر المجموعات

نعود الآن إلى نوع المسائل التي قدمت أولًا في الفصل السادس: كم تكون الحفلة كبيرة حتى نتأكد من ضمان وجود مجموعة من أربعة أصدقاء

بالتبادل أو أربعة غرباء بالتبادل؟ بوصفها في لغة للشبكات نسأل كم عدد العُقد تتطلبها شبكة بسيطة G حتى يتأكد احتواء إما G أو $\bar{G}$ نسخة من K_4؟ لقد ثبت أن هذا العدد هو 18 في الحقيقة. لا أستطيع إثبات هذا هنا، ما يمكن إثباته، على أية حال، أن العدد موجود وسوف أقدم حجة لإثبات أنه ليس أكثر من 63. هذا قد يبدو غير مثير للإعجاب، لكن تذكر أنه ليس من الواضح أن العدد لابد من وجوده على الإطلاق. الحُجة المُعطاة واحدة مهمة جدًا وهي الأساس لبرهان نظرية رامزي المطبقة على مجموعات أكثر عمومية من التي نعتبرها، وأيضا لها تفسيرات مفيدة في الحالات التي تحتوي مجموعات لانهائية. على الأخص الحُجة التي أقدمها هنا يمكن تعميمها لتثبت أن أعداد رامزي موجودة دائمًا، أي تقول: «لأي عدد n مُعطى يوجد عدد N بحيث إن شبكة بسيطة لها N عُقدة أو أن المكملة لها تحوي نسخة من K_n داخلها.» في الفصل السادس، السؤال الثامن رأينا أنه إذا كانت $n = 3$ فإن $N = 6$ وهي الحالة الأولى الجديرة بالاهتمام. سوف أثبت الآن أنه بقيمة $n = 4$ فإن قيمة N لن تكون أكبر من 63:

من الأسهل اعتبار شبكة G والمكملة لها متداخلتين، مما يُكوِّن نسخة من الشبكة الكاملة.

لوِّن الأحرف بالأبيض أو الأسود تبعًا لكون الحرف ينتمي إلى G أو إلى $\bar{G}$. ما سوف أثبته أنه بفرض أن الشبكة تحوي 63 عُقدة، فإنها يجب أن تحتوي على نسخة وحيدة اللون من K_4، أي تقول توجد مجموعة من أربع عُقد بحيث إن الأحرف المارة بين هذه العُقد كلها باللون الأبيض أو أنها كلها باللون الأسود.

لنفرض إذن أن شبكتنا هذه (أو الحفلة إذا رغبت) لها على الأقل:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \text{ عقدة}$$

إذا تذكرت صيغة المتسلسلة الهندسية من أول مسألة في الفصل الأول فسوف ترى أن هذا العدد هو: $2^6 - 1 = 63$ (العدد ليس مهمًّا فعلا فيما يأتي:

جرى اختياره كما سترى فقط للتأكد من أن لدينا إمدادات كبيرة كافية من العُقد لإجراء الطريقة الآتية):

نركز على إحدى العُقد A_1 — مثلًا — ونستمر كالتالي (شكل ١٤). من كل الأحرف الخارجة من A_1 (يوجد على الأقل 62 منها طبعًا، لأننا نستخدم الشبكة الكاملة). على الأقل نصفهما من لون واحد. ليكن C_1 (إما أبيض أو أسود). بالنظر إلى جميع العُقد المتصلة بالعُقدة A_1 بحرف من اللون C_1 نرمز لهذه المجموعة بالرمز S_1. هناك ما لا يقل عن:

$$\frac{1}{2}(2+2^2+2^3+2^4+2^5)=1+2+2^2+2^3+2^4=31$$

عقدة. فلنختر واحدة ونطلق عليها A_2:

على الأقل نصف الأحرف من A_2 ومؤدية إلى عُقد أخرى في S_1 كلها من لون واحد. نسمي هذا اللون C_2 (قد يكون أو لا يكون مثل اللون C_1). لتكن S_2 هي مجموعة هذه العُقد. نلاحظ أن S_2 محتواه تمامًا في S_1 وهي نفسها لها على الأقل:

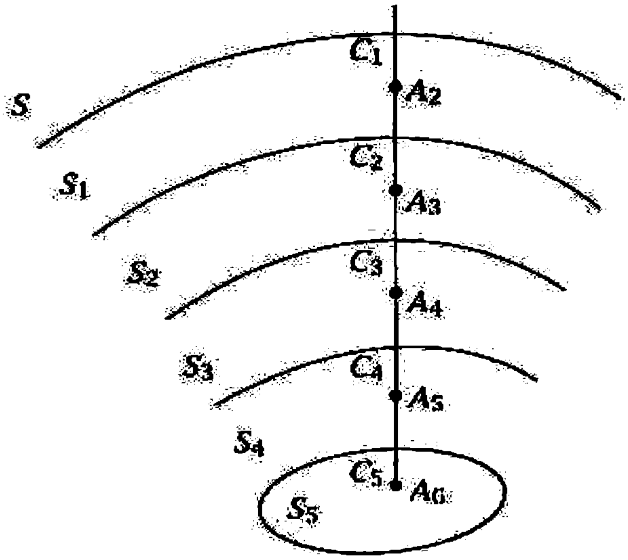
$$\frac{1}{2}(2+2^2+2^3+2^4)=1+2+2^2+2^3=15$$

عنصر. نختار عنصرًا جديدًا A_3 من S_2.

نقوم بهذه العملية خمس مرات، فنحصل على العُقد $A_1, A_2, \ldots, A_6$ وتجميع من المجموعات:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,$$

كل مجموعة منها محتواه في التي تسبقها كما في شكل ١٤. العدد المبدئي للعُقد جرى اختياره ليضمن القيام بهذه العملية على الأقل 5 مرات، المجموعات S_3، S_4، S_5 يكون لها على الأقل 7، 3، 1 عضو على الترتيب. كيف يساعد كل ذلك؟ نحن بحاجة إلى مراقبة دقيقة الآن لوضع السؤال. الفقرة التالية لديها الفكرة الرئيسية لكنها تتطلب بعض التفكير:



شكل ١٤

خذ قائمة العُقد A_1، A_2، A_3، A_4، A_5، تنظر إلى أي عنصر في هذه القائمة A_1 مثلًا؛ كل الأحرف من A_3 إلى أعضاء المجموعة S_3 لها نفس اللون. لكن A_4، A_5، A_6 جميعها في S_3، أي أن كل الأحرف من A_3 إلى أعضاء القائمة التي تتلو A_1 لها نفس اللون. هذه الحجة تستخدم من A_1 إلى A_5، كل واحد من A_i له لون يرتبط معه، C_i، هو نفسه لون الأحرف التي تؤدي منها إلى جميع أعضاء القائمة التالية له. الآن لا يوجد سوى لونين متاحين الأبيض والأسود وعلى ذلك على الأقل ثلاثة من A_5، ... A_1. له نفس اللون (مثلًا الأبيض) مرتبط معها. اختر هذه المجموعة من ثلاثة مع A_6. الآن كل حرف بين هذه الأربعة أحرف يجب أن يكون أبيض وهكذا وجدنا نسخة أحادية اللون من K_4، أو إذا فضلت مجموعتنا من أربعة يعرف بعضهم بعضًا بالتبادل.

الآلات واللغات

موضوعنا النهائي ينطوي على النظر إلى الشبكات من منظور مختلف تمامًا. ننظر إليه على أنه آلات ميكانيكية. المكون الرئيسي للتشغيل الآلي هو الشبكة حيث «العُقد» تسمى عادة: «حالات». من بين العُقد توجد الحالة المبدئية

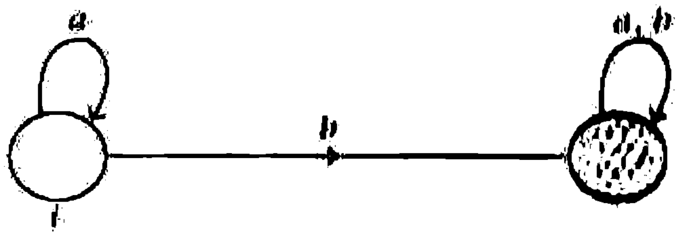
وعدد الحالات المقبولة. (قد يوجد أكثر من واحدة منهم، والحالة المبدئية قد تكون حالة مقبولة.) في أي وقت تكون آلة أوتوماتيكية (أتوماتون) $\mathcal{A}$ تكون في حالة ما ويمكن تفعيلها بالمدخلات، التي يرمز إليها بحرف من مجموعة تعرف بالأبجدية. ويكون تأثير ذلك هو تحول الأتوماتون من حالة إلى أخرى. بعد سلسلة من الحروف (تسمى كلمة) w تؤثر على $\mathcal{A}$، فإن الأوتوماتون ستكون إما في حالة قبول أو لا، حيث تأخذ حروف w (الأبجدية) الأوتوماتون لمتتابعة من الحالات. نقول إن الكلمة w مقبولة من الأوتوماتون أو إنها معترف بها من الأوتوماتون، إذا ما تركت الأوتوماتون في حالة مقبولة. إذا لم يحدث ذلك فإن w تكون مرفوضة، ونقول إن الكلمة ليست جزءًا من اللغة المعروفة للأتوماتون.

إذا فضلت الانغماس في التشبيه البشري، يمكن التفكير في حالات $\mathcal{A}$ كأنها الشعور بالحالات المقبولة تمثل أن الآلة لها مزاج جيد والحالات الأخرى كمزاج سيئ. الآلة تستيقظ في مزاجها الأول (قد يكون جيدًا أو سيئًا اعتمادًا على شخصية الآلة) والمدخلات التي تعرضت لها تتركها في مزاج إما جيد أو سيئ، إذا انتهت في مزاج جيد فإنها تقبل الكلمة (word)، لكن إذا وضعت الكلمة في مزاج سيئ فإنها ترفضه.

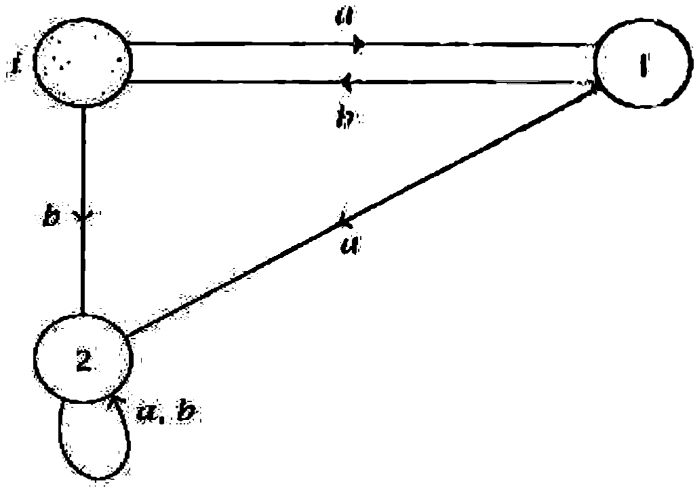
فمثلًا، ليكن لدينا أبجدية بسيطة $A = \{a, b\}$. هذه دائما كافية لأغراضنا، وأما لمعظم الأعمال النظرية فإن حرفين من الأبجدية كافيان. في الأشكال ١٥–١٧ الحالة المبدئية لها العلامة i والحالات المقبولة مظللة. الأسهم على الأحرف تشير إلى كيف يغير الحرف الأوتوماتون من حالة إلى أخرى.

الأوتوماتون الموضح في (شكل ١٥) تعترف بالكلمة شرط أن تحتوي على الأقل حرفًا واحدًا b. الكلمة المكونة فقط من as لا تحرك الأوتوماتون من الحالة المبدئية. عند رؤية الآلة للحرف b فإنها تكون سعيدة وتظل في مزاجها السعيد (الحالة المقبولة) مهما ترى بعد ذلك.

الآلة التالية ليس من السهل إسعادها (شكل ١٦). هذا الزميل سيعترف بالكلمة فقط إذا تكونت من سلسلة من abs، حتى الكلمة الفارغة (سلسلة



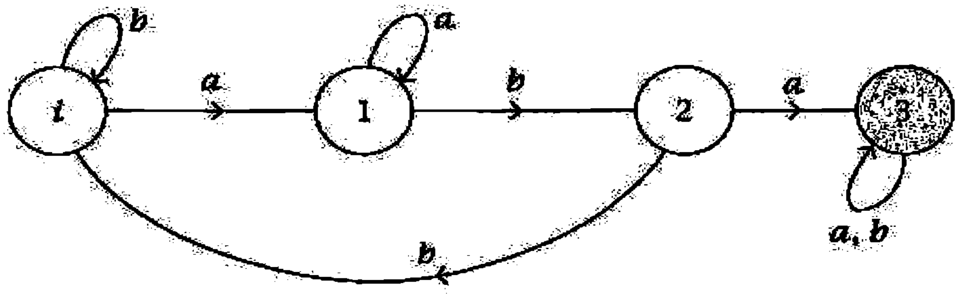
شكل ١٥



شكل ١٦

من عدد صفر من «ab»). فمثلًا الكلمة abababab ستعمل على تحريك الآلة من الحالة المبدئية (وهي أيضًا الحالة الوحيدة المقبولة) للحالة «1» والعودة مرة أخرى إلى الحالة *i* أربع مرات. لأن السلسلة السابقة تنتهي عند الحالة المقبولة التي تعترف بها هذه الكلمة. مع ذلك فإنها تخبرنا حالًا أنها لم تحصل على سلسلة من *abs* لتتحرك إلى حالة «البلوعة» 2، حيث لا تزحزح ثانية. هذا يحدث إذا بدأت الكلمة بالحرف *b* أو إذا كانت كلمتك تحوي نفس الحرف مرتين متتاليتين. أي من هذه الحوادث كافٍ للإساءة للآلة مادامت تعرف أنه قُدم لها كلمة ليست من لغتها وبعدها ستفقد الاهتمام كليًّا.

كمثال ثالث ابحث عن اللغة المقبولة للأوتوماتون الصغير في (شكل ١٧)، هذه الآلة تقبل الكلمة إذا — وفقط إذا — احتوت المقطع aba، فمثلًا



شكل ١٧

baabaa تُقبل بينما abba لا تُقبل. في الحقيقة هذا أصغر أتوماتون يمكن تصميمه لقبول هذه اللغة الخاصة.

نظرية الأوتوماتا automata هائلة ولها نظرية جبرية خاصة بها وتكون جزءًا من موضوع يعرف باسم: «نظرية شبيه الزمر الجبري».

هناك العديد من التطبيقات لنظريات علوم الحاسب وهذه النظرية نفسها رائعة جدًّا. فمثلًا لأي لغة معترف بها L يوجد دائمًا أتوماتون وحيد وهو الأصغر الذي يعترف بـ L. فصل اللغات المعترف بها نفسه قادر على عدد من الخصائص الأنيقة، بعضها يقود إلى فصل ينشأ طبيعيًّا في أماكن غير متوقعة.

للقراء الراغبين في التجربة، حاول أن ترسم أتوماتون يعترف باللغات الآتية:

(١) كلمات تحوي ba كعامل.
(٢) كلمات تحوي كلًّا من الحرفين a، b.
(٣) كلمات تنتهي بالحرف a.

يمكنك أن تحلم بما ترغب لكن يجب أن تكون متيقظًا لأن كثيرًا من اللغات البسيطة الموصوفة غير معترف بها. فمثلًا اللغات المكونة من كل الكلمات التي تقرأ طردًا وعكسًا (مثل radar، minim، redder، peep)، ليست لغة لأي أتوماتون: إذا كانت $\mathcal{A}$ تعترف بجميع الكلمات التي تقرأ طردًا وعكسًا،

فإنه يمكن إثبات أنها من الضروري أن تعترف ببعض الكلمات الأخرى التي لا تقرأ عكسًا وطردًا.

سوف أختم هذا ببرهان لمثل هذه اللغة غير المعترف بها وهذا يسمح لنا باستخدام مبدأ «عش» الحمام الذي قدم في السؤال ٧ من الفصل ٦. المثال هو: اللغة L لكل الكلمات على الصورة a^nb^n، أي أن جميع الكلمات $ab, aabb, aaabbb, \ldots$ (هذا يدعو إلى القول إن الأتوماتا لا تستطيع عدّ، أو على الأقل تكون محدودة في الكيفية التي تضع بها الأشياء في أزواج.)

لنفترض أن $\mathcal{A}$ هو الأتوماتون الذي يعترف بجميع الكلمات في اللغة السابقة L، وهذا من الممكن تماما، لكنني سوف أوضح أن $\mathcal{A}$ ستكون مجبرة على الاعتراف بكلمات ليست من هذا النوع أي أن اللغة المرتبطة بـ $\mathcal{A}$ ليست L ولكن مجموعة أكبر من الكلمات.

لكل عدد n فالكلمة a^n سوف تأخذ $\mathcal{A}$ من الحالة المبدئية i إلى حالة ما نطلق عليها s_n. لأن a^nb^n معترف بها في $\mathcal{A}$، فإن الكلمة b^n تأخذ $\mathcal{A}$ من الآلة s_n إلى حالة معترف بها c. الآن لأن $\mathcal{A}$ لديها عدد محدود من الحالات (finite) لكن هناك عددًا لانهائيًا من الأعداد n فينتج أنه يوجد عددان مختلفان m، n مثلا بحيث إن الحالتين s_m، s_n متطابقتان بالرغم من اختلاف n عن m.

في ضوء ذلك، بالنظر للكلمة a^mb^n وهي ليست موجودة في L لأن $n \neq m$ فالكلمة a^mb^n اعترف بها في $\mathcal{A}$ لأن a^m تأخذ $\mathcal{A}$ من الحالة i للحالة $s_m = s_n$ ثم b^n تأخذ $\mathcal{A}$ من s_n للحالة المقبولة c، كما سبق.

هذا الكتاب:

متى يتطابق عقربا الساعة؟ وما احتمال أن يكون تلميذان في نفس الفصل قد ولدا في يوم واحد؟ وأيهما أجدر أن تقوم به: لعب الروليت أم المشاركة في اليانصيب؟ كيف نحسب حجم كعكة الدونت؟ لماذا تخسر شخصية الإنسان الآلي «داتا» دائمًا في المسلسل الشهير «ستار تريك» في لعبة البوكر؟ ترى ما مشكلة أرانب فيبوناتشي؟

يكشف لنا هذا الكتاب بما يحتويه من ألغاز وأسئلة أن هناك جوانب رياضية لكثير من الأمور في عالمنا، وقد ألّف بأسلوب سلس ممتع بحيث يشبع نهم وفضول كل من تجتاحه رغبة التعرف على الرياضيات وما يمكن لهذا العلم أن يفعله. ويقدم بيتر هيجنز على صفحات الكتاب تفسيرات واضحة للجوانب الغامضة في مبادئ الرياضيات التي تعلمناها في طفولتنا، ويعرض الكثير من الأمور الجديدة والعلاقات المنطقية التي تثبت في النهاية أن علم الرياضيات يمكن أن يكون علمًا ممتعًا ويحفل في الوقت نفسه بالمفاجآت.

٢٥٦ صفحة
ISBN 978-977-6263-49-2
http://www.kalimat.org
كلمات
كلمة KALIMA


روائع مجلة
الابتسامة
من الكتب
المعالجة
والصفحات الفردية